EL CONTROL INTERNO DEL RIESGO.
UNA PROPUESTA DE SISTEMA
DE LÍMITES RIESGO NEUTRAL

Mariano González Sánchez
Secretario del Club de Gestión de Riesgos de España

Profesor del Departamento de Empresa

de la Universidad San Pablo-CEU

27 de junio de 2000

FUNDACIÓN DE LAS CAJAS DE AHORROS CONFEDERADAS
PARA LA INVESTIGACIÓN ECONÓMICA Y SOCIAL
DOCUMENTO DE TRABAJO
Nº 163/2000

La serie **DOCUMENTOS DE TRABAJO** incluye avances y resultados de investigaciones dentro de los programas de la Fundación de las Cajas de Ahorros Confederadas para la Investigación Económica y Social. Las opiniones son responsabilidad de los autores.

El control interno del riesgo. Una propuesta de sistema de límites riesgo neutral

Mariano González Sánchez
Secretario del Club de Gestión de Riesgos de España
Profesor del Departamento de Empresa de la Universidad San Pablo-CEU

27 de junio de 2000

ABSTRACT

Este trabajo presenta una propuesta de control interno de riesgos a través de un sistema de límites. Dicha propuesta conlleva la integración de la gestión del riesgo en todos los niveles de la organización empresarial.

El documento define los límites como la cobertura de la gestión realizada, y realiza una catalogación de los mismos en función de su objetivo.

El problema planteado consiste en una optimización del uso de los recursos, donde la función objetivo viene definida en términos riesgo neutrales, es decir, el coste de la gestión no puede superar al de la correspondiente cobertura de mercado, ya sea para garantizar un valor o una rentabilidad. Asimismo, las restricciones se plantean en términos de riesgo asumido para diferentes niveles de confianza y horizontes temporales. Lo característico de dichas restricciones estriba en el método de estimación de los parámetros, ya que se emplea la teoría de eventos extremos y la condicionalidad a través de procesos autorregresivos heterocedásticos.

Al mismo tiempo, se fija un mecanismo de control de recursos ociosos y señales de alerta, que viene definido por el error de la medición condicional del riesgo, y por la posibilidad de transformar la matriz de restricciones desde la organización interna a la externa. Finalmente, se propone un sistema de integración del control de riesgo en el de remuneración, es decir, se presenta una aproximación a la remuneración variable en términos de riesgo.

Índice del documento

1. INTRODUCCIÓN

La adaptación y la superación son objetivos básicos y finales de cualquier entidad, incluidas las no financieras, de manera que la manifestación final del riesgo constituye la no adaptación, y por ende la no superación, de una determina circunstancia, y por simple antagonismo, la rentabilidad sería la situación inversa.

De esta forma justificamos la importancia del concepto de riesgo dentro de la empresa, hasta tal punto que podemos definir la actividad desarrollada por ésta como el resultado de una gestión tendente a asumir riesgos. Es decir, si el mercado se compone por un conjunto de relaciones económico-sociales donde se intercambia, en última esencia, riesgo no deseado, las entidades en ocasiones se desprenderán de parte de su riesgo, y en otras lo asumirán.

Una característica del entorno empresarial actual es la flexibilidad, entendida como la posibilidad de elegir, y cuyo reflejo contractual son las llamadas opciones. Estas opciones tendrían una evidente justificación, nadie conoce con absoluta certeza el futuro, luego sólo cabría que se desconociese totalmente (incertidumbre), o que se conociese en términos probabilísticos.

Si todos los agentes económicos de un mercado considerasen que el futuro es una gran incertidumbre no habría mercado, puesto que toda operación reportaría el mismo riesgo en ambos sentidos, o para ambas contrapartidas, de manera que no tendría razón de ser. En cambio, si los agentes del mercado conociesen el futuro con diferentes grados de probabilidad, las transacciones tendrían una justificación total, puesto que se buscaría una doble finalidad, bien modificar la situación de riesgo asumida, o bien, rentabilizar las modificaciones de riesgo del resto de agentes bajo la hipótesis de que sus decisiones son erróneas, o que han sido tomadas bajo probabilidades de ocurrencia o no ocurrencias falsas.

Así pues, el mercado servirá para que unos agentes puedan adquirir dicha flexibilidad, posibilidad u opción, según la probabilidad que estimen tiene cada estado futuro del mercado, y otros, que considerarán que los primeros están equivocados en sus estimaciones, obtengan un precio por dotarles de dicha flexibilidad, esto es, por asumir su riesgo. De esta manera, un mercado perfecto en términos de riesgo, sería aquél que cotizase un justiprecio igual al obtenido bajo las presunciones probabilísticas de todos los agentes que intervengan en el mismo.

En este contexto se hace preciso una gestión que permita asumir sólo los riesgos deseados, y para los que la entidad esté capacitada. Entendiendo por dicha capacitación tanto los medios técnicos y humanos empleados, como los recursos existentes y generados, que puedan emplearse para cubrir posibles situaciones críticas.

Según lo anterior, el problema de la gestión de los recursos propios debe solucionarse en términos de riesgo, o lo que es igual, intentar maximizar su rentabilidad, bajo las restricciones o límites a los riesgos oportunos.

A lo expuesto hasta aquí debe añadirse, según establece la legislación mercantil, que los recursos propios son la garantía de terceros, por tanto, la política de provisiones que lleve la entidad debe compaginarse con el volumen de recursos propios de que disponga la empresa para compensar posibles situaciones extraordinarias. Normalmente, el regulador ya establece un sistema mixto (provisiones y recursos propios), entonces el problema sería fijar que cuantía del riesgo debería provisionarse y cuál garantizarse con recursos propios.

Si a todo esto unimos la actual corriente normativa de liberalización de la gestión de riesgos, que ha supuesto el desarrollo de los llamados modelos internos, se hace aún más acuciante para las entidades, poseer un adecuado sistema de fijación de límites a las situaciones de pérdidas probables.

2. JUSTIFICACIÓN, CONCEPTO Y CLASES DE LÍMITES

2.1. Justificación y concepto de límite

En el desarrollo habitual de la actividad se siguen unas pautas para poder alcanzar unos objetivos. Así en primer lugar, el Consejo de Administración fijará el *objetivo principal*, que vendrá dado en términos de creación de valor o de rentabilidad. Una vez fijado el objetivo básico, el Comité de Dirección deberá desarrollarlo con la intención de establecer los *objetivos secundarios*, o necesarios para alcanzar el objetivo fundamental. Su determinación se hará en términos de las dos variables básicas que intervienen en toda decisión de inversión, la rentabilidad y el riesgo. Por tanto, este segundo paso consistirá en expresar el objetivo como una media de rentabilidad ajustada a los principales riesgos que pueden afectar a la entidad, por lo que será preciso que éstos previamente sean identificados, así como en que actividad, mercado, producto, etc., se presentan.

Cuando estos riesgos se cataloguen según su grado de incidencia sobre la entidad, la rentabilidad ajustada al riesgo se determinará en función del volumen de recursos propios, o capital económico necesario para lograr el objetivo de rentabilidad.

De esta manera, a priori se precisa conocer la rentabilidad esperada y el riesgo asumido por cada categoría.

Pero este planteamiento no es tan simplista, puesto que debe considerarse la posible incidencia de diferentes riesgos sobre una misma vía de generación, esto es, hay que introducir la correlación entre factores de riesgo. Esto supone que el problema de obtención de un objetivo de rentabilidad no puede plantearse como una suma de variables independientes, sino como un objetivo de "hedged return" (cobertura de la rentabilidad), es decir, si la dirección debe lograr un resultado, cualquier otro inferior sería contraproducente, a igual que cualquier otro superior que hubiese supuesto mayor exposición al riesgo. De esta forma, es necesario contar con el intervalo de confianza de dicha rentabilidad, esto es, dentro de las posibles combinaciones de inversiones que generen una rentabilidad comprendida en dicho intervalo, la combinación óptima será la que genera mayor rentabilidad asumiendo menor riesgo.

Como este sería un problema de doble objetivo, es decir, maximizar y minimizar, debe fijarse una de las dos variables, así, puesto que el objetivo viene dado en términos de rentabilidad, se fija el riesgo, surgiendo de esta forma la idea de límite. Fijar este riesgo equivale a cubrir la rentabilidad esperada ("hedged return"), o poner un "stop loss" al valor de la entidad (cobertura del valor).

Por tanto, el límite es la cobertura de gestión, o la gestión de cobertura de la dirección sobre la operativa habitual de la entidad.

Dado que los límites constituyen una cobertura frente al riesgo, el problema deberá considerarse como una optimización del empleo de los recursos, sometidos a ciertas restricciones o límites, que vendrán fijadas en términos de riesgo.

2.2. Clases de límites

Los límites como cobertura o restricción al uso de los recursos pueden clasificarse atendiendo a diferentes criterios:

- ✓ Según la relación entre el factor de riesgo y la organización, destacan los siguientes límites:

CLASE DE	RESTRICCIÓN

FACTOR	
INTERNO	Actividades Áreas Operadores
EXTERNO	Mercado Producto Contrapartida

- ✓ Determinados los conceptos que van servir de restricción, deben transformarse en los límites propiamente dichos, para lo cual deberá fijarse la unidad de medida y su sistema de determinación. Dado que existe una diversidad de unidades de medidas, los límites también podrán clasificarse según la técnica de estimación empleada:

UNIDADES DE MEDIDAS	SISTEMAS DE ESTIMACIÓN
EXPOSICIÓN MÁXIMA	Nocionales y valores extremos
PÉRDIDA ACUMULADA	Resultados acumulados
PÉRDIDA PROBABLE	Value at Risk analítico y simulado
SITUACIONES EXTREMAS[1]	Teoría del valor extremo, stress test y worst case
SENSIBILIDAD	Factores fundamentales[2]

- ✓ Finalmente, según el nivel de restricción al que vayan destinados, los límites pueden clasificarse en:

  - Global, o asignado al total de factores de riesgo.
  - Parcial, o asignado a una categoría de riesgos.
  - Individual, o asignado particularmente a cada factor de riesgo.

  Cada uno de estos límites deberá ser fijado por un nivel de la organización, así el global y parcial corresponderá a la alta dirección, y consistirán en un "stop loss", mientras que la asignación individual correspondería al responsable de cada área, siguiendo una política de "hedged return". Por tanto, los primeros son consecuencia de decisiones de supervivencia, y podremos denominarlos *límites estratégicos*, mientras que los segundos buscarán la rentabilidad ajustada al riesgo óptima, y los llamaremos *límites operativos*. Entre ambos tipos existirá una estrecha relación, máxime teniendo en cuenta que los primeros englobarán a los segundos, puesto que su período de estimación será mayor, como veremos seguidamente.

---

[1] Hace referencia a los posibles eventos de difícil predicción pero con una importante repercusión sobre los mercados.

[2] Los factores fundamentales pueden fijarse atendiendo a diferentes criterios:

- ❖ Teoría de valoración: por ejemplo para la Capital Asset Pricing Model (CAPM) serían las betas y la matriz de covarianzas.
- ❖ Según los factores que intervienen en su valoración mediante la aplicación de Taylor: surgen así las deltas, gammas, vegas, duraciones, convexidades, etc.
- ❖ Según la distribución de los resultados: media, desviación estándar, asimetría, curtosis, etc.

3. IMPLEMENTACIÓN DEL SISTEMA DE LÍMITES

3.1. Planteamiento del problema

Llegados a este punto, el problema de fijación de límites puede contemplarse como una cuestión de optimización de recursos en términos de riesgo asumido.

Para su análisis será preciso determinar una función objetivo que establezca el riesgo total asumible por la entidad en función de las preferencias de sus accionistas, y al mismo tiempo, distribuya los recursos necesarios para alcanzar el objetivo entre los distintos niveles de la organización, para lo que será necesario fijar unos límites de riesgo, es decir, las restricciones al problema.

Además, este planteamiento debe formularse en dos vertientes no excluyentes, por un lado, deberá garantizarse un valor mínimo de la entidad, y por otro, habrá que asegurar una rentabilidad proporcional al nivel de riesgo asumido.

Mientras el primero de los problemas constituye una cobertura del valor o “stop loss”, el segundo representa una cobertura del rendimiento o “hedged return”.

De este planteamiento se derivan una serie de cuestiones, que pretendemos resolver en los siguientes apartados, y que enumeramos a continuación:

- ✓ ¿Cómo debe definirse la función objetivo que optimice el uso de los recursos y que además refleje las preferencias de los accionistas?
- ✓ ¿Qué propiedades deben cumplir las restricciones o límites?
- ✓ ¿Qué modelo de medición de riesgos debe emplearse?
- ✓ ¿Cómo afecta la correlación entre los factores al problema?
- ✓ ¿Cuál debe ser el horizonte temporal de estimación del riesgo, y cómo puede realizarse una transformación temporal adecuada de las estimaciones?
- ✓ ¿Cuál debe ser el intervalo de confianza empleado?
- ✓ ¿Qué incidencia tiene la volatilidad sobre el problema, y cómo debe ser considerada?
- ✓ ¿A qué nivel deben fijarse los límites?
- ✓ ¿Qué debe considerarse un rebasamiento, y cómo puede estimarse?

✓ ¿Debe tener incidencia sobre la remuneración del personal el problema planteado?

Estas y otras cuestiones tienen respuesta en los siguientes apartados.

3.2. Función objetivo y optimización del problema

La gestión del límite a largo plazo pretende garantizar un valor mínimo de los recursos propios de la entidad (RP). Así el valor de los recursos propios en un momento dependerá de su importe en el instante anterior y de la rentabilidad del período (R):

$$RP_1 = RP_0 \cdot (1+R) \Rightarrow \begin{cases} R < 0 \rightarrow RP_0 > RP_1 \rightarrow \nabla RP \\ R = 0 \rightarrow RP_0 = RP_1 \\ R > 0 \rightarrow RP_0 < RP_1 \rightarrow \Delta RP \end{cases}$$

Además se conoce que existe una relación entre la tasa de interés libre de riesgo (r) y la rentabilidad de la entidad (R), definida por:

$$R = r + \frac{\text{riesgo}}{RP} \cdot Z$$

Donde Z representa el grado de aversión al riesgo de los accionistas.

A partir de las expresiones anteriores puede llegarse a:

$$RP_1 = RP_0 \cdot \left[1 + \left(r + \frac{\text{riesgo}}{RP_0} \cdot Z\right)\right]$$

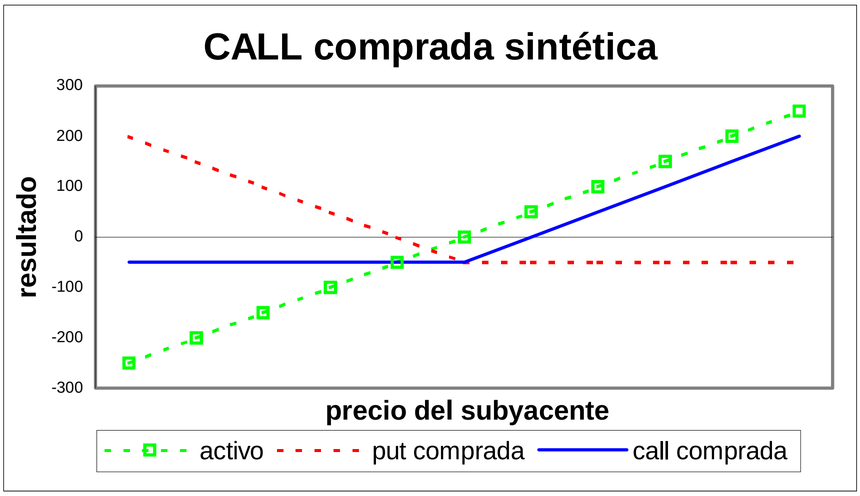
$$Z = \frac{RP_1 - RP_0 \cdot (1+r)}{\text{riesgo}} = \frac{RP_0 \cdot (R - r)}{\text{riesgo}} \rightarrow \begin{cases} R < r \\ R = r \\ R > r \end{cases}$$

Las tres posibilidades que se plantean exponen las tres situaciones posibles, esto es, existe interés por asumir riesgos, no existe aversión al riesgo, y la aversión es positiva, y mayor cuánto mayor sea la rentabilidad esperada (R). Por tanto, según sea la probabilidad subjetiva de cada accionista, el valor de la rentabilidad esperada será diferente, y esto hará que su grado de aversión también lo sea.

Una posibilidad de evitar este grado de subjetividad es sustituir esta probabilidad por la de martingala, para lo cual recurrimos a la teoría de opciones.

Dado que el objetivo de los límites es fijar la pérdida máxima asumible ("downside") o garantizar un nivel mínimo de los recursos propios, una forma de lograrlo es mediante la técnica de "stop loss". La representación de ésta en términos de la teoría de opciones es una CALL comprada, puesto que limita el "downside" al importe de la prima pagada, mientras que el beneficio no tiene un techo máximo.

A partir de la paridad put-call, sabemos que una call comprada puede construirse sintéticamente mediante una posición larga en el subyacente y la compra de una put sobre dicho activo, gráficamente:



De esta manera, el límite podría entenderse como:

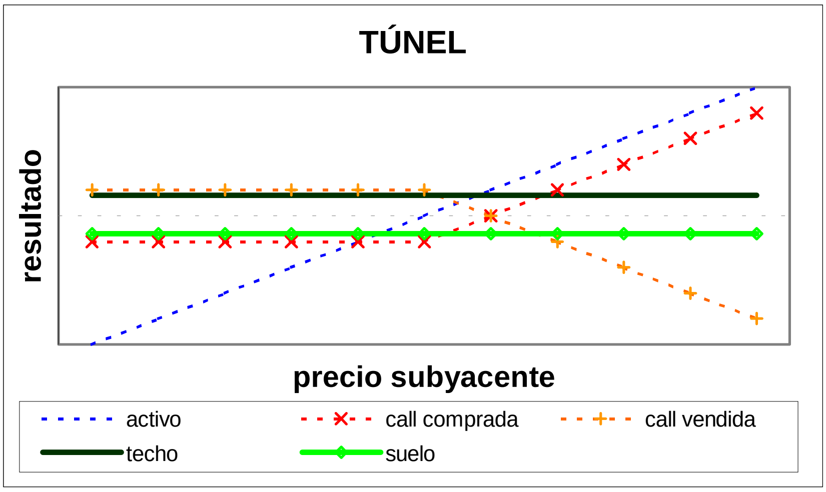
$$\text{CALL} = \text{ACTIVO} + \text{PUT}$$

Esto equivaldría a comprar una put sobre el activo con un precio de ejercicio igual al valor mínimo a garantizar, y un vencimiento en función del tipo de límite.

Como comprobamos esta estrategia tiene un coste, la prima de la put a comprar. Para evitarlo, existe otra estrategia, el collar o túnel. Consistente en garantizar un resultado mínimo y otro máximo, para de esta forma compensar el coste de cubrir el "downside" renunciando a parte del "upside" o beneficio potencial. Se construye mediante la posesión del subyacente, la compra de una call y la venta de otra, ambas con igual vencimiento pero diferente precio de ejercicio. Esto último supondrá que el túnel tenga un techo y un suelo no simétricos, sino fijados para que la prima final sea cero. Entonces la estrategia puede expresarse como sigue:

$$ACTIVO + CALL(E_1) - CALL(E_2)$$
$$prima(CALL_1) - prima(CALL_2) = 0$$

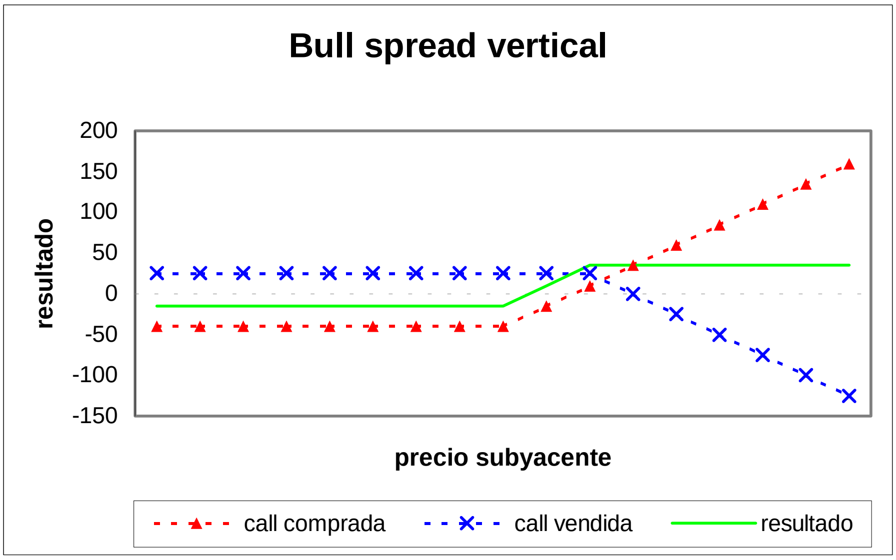
Resultando gráficamente:

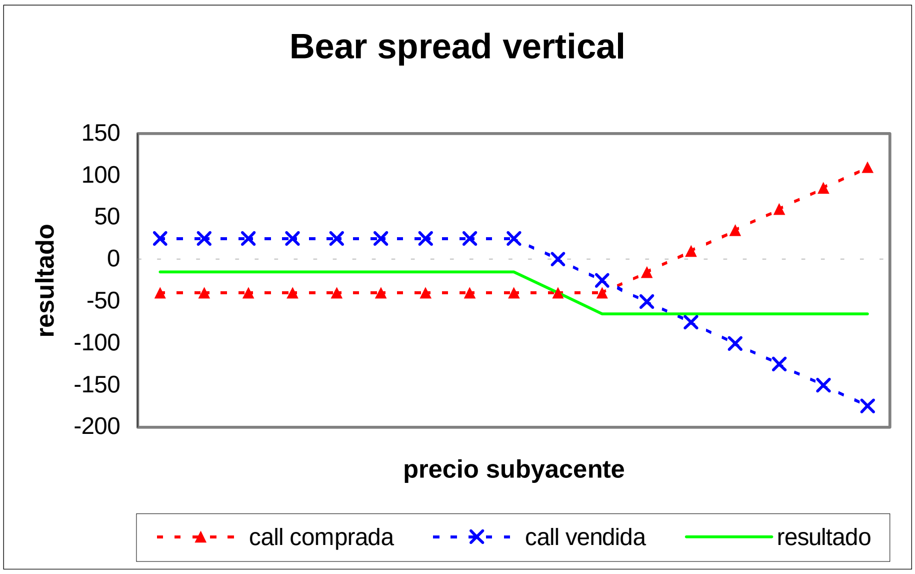


Si incorporamos la paridad put-call, entonces:

$$\left.\begin{array}{l} A + C(E_1) = -P(E_1) \\ -A - C(E_2) = P(E_2) \end{array}\right\} \rightarrow C(E_1) - C(E_2) = -P(E_1) + P(E_2)$$

Que representan los "spreads" verticales "bull" y "bear", y gráficamente serían:





En las estrategias spread no sólo se garantiza el valor mínimo y máximo, sino que además, se establece la pendiente del resultado como consecuencia de la fluctuación del precio del subyacente entre el techo y el suelo.

Entonces, estas estrategias aplicadas sobre la cartera de un accionista que posea una acción dan lugar a:

$$A - C(E_1) + P(E_2) = B$$
$$E_1 > E_2$$

Donde A es la acción, C la call vendida y P la put comprada, de manera que la acción más la put representan el "stop loss", o pérdida máxima asumida, y al añadir la call vendida, no sólo se consigue rebajar el coste de la estrategia, sino que se asegura una rentabilidad máxima, representada por el valor del bono o flujo final que se percibirá (B), y que podemos expresar como:

$$\frac{[E_1 - E_2] + [C(E_1) - P(E_2)]}{A - C(E_1) + P(E_2)} = \frac{B}{100} - 1$$

Si comprobamos esta estrategia a través de un sencillo ejemplo donde el valor de la acción es de 1.000 u.m., el precio de la call vendida es 5 u.m., siendo su precio de ejercicio 1.155 u.m., y la prima de la put comprada es de 55 u.m., con un precio de ejercicio de 1.000 u.m., entonces suponiendo que la rentabilidad que desea garantizarse es del 10% ("hedged return"), y que el valor que pretende cubrirse es de 1.000 u.m. ("stop loss"), la estrategia resultante en términos de rentabilidad sería:

$$\frac{[1.155-1.000]+[5-55]}{1.000 - 5+55} = +10\% \rightarrow \text{hedged return}$$

$$\frac{1.000-1.050}{1.050} = -4{,}76\% \rightarrow \text{stop loss}$$

Comprobando ahora el comportamiento de la estrategia para diferentes precios obtenemos:

Momento	Activo	Call (1.155)	Put (1.000)	Total	Rentabilidad
Coste inicial	-1.000	+5	-55	-1.050	
Venta final-1	+800	0	+200	+1.000	$\frac{1.000-1.050}{1.050} = -4{,}76\%$
Venta final-2	+900	0	+100	+1.000	$\frac{1.000-1.050}{1.050} = -4{,}76\%$
Venta final-3	+1.100	0	0	+1.100	$\frac{1.100-1.050}{1.050} = +4{,}76\%$
Venta final-4	+1.200	-45	0	+1.155	$\frac{1.155-1.050}{1.050} = +10\%$

Por tanto, la rentabilidad máxima garantizada es del 10%, a cambio de asumir una rentabilidad mínima del –4,76%, igual al "stop loss".

Hasta este punto son varias las conclusiones que podemos extraer:

1. Los límites a largo plazo o estratégicos se corresponden con una técnica de "stop loss", pudiendo replicarse mediante opciones call, y su réplica sin coste (o mínimo) mediante un túnel.

2. Los límites a corto plazo u operativos equivalen a garantizar una rentabilidad mínima que permita asegurar el valor de los recursos propios, dicha rentabilidad viene dada por la pendiente de la correspondiente estrategia "spread", y se corresponde con la postura de "hedged return".

Ambas estrategias tendrán un coste por cubrir el "downside", dicho coste será la suma del valor de las correspondientes opciones, así pues:

- ✓ En caso de "STOP LOSS" el coste será mayor si la estrategia es cubrirse del "downside" sin fijar el "upside" (call), que fijándolo (túnel). Además, cuánto menor sea la minusvalía que puede tener lugar, mayor será el coste. En caso de una call deberá estimarse su valor, y en el supuesto de un túnel el valor será el coste de la call comprada menos el de la call vendida, sin olvidar que sus precios de ejercicio son diferentes, y por tanto, sus volatilidades (smile).

- ✓ Para el "HEDGED RETURN" el coste será la diferencia entre la prima de la opción comprada y la vendida, y de igual forma que en la anterior, cuánto menor sea la minusvalía posible, mayor coste, o bien, a mayor pendiente de la recta que una el techo y el suelo desde los extremos de éstos, mayor será la rentabilidad asegurada, y por ende mayor el coste de la estrategia. En esta estrategia, al igual que la precedente, un mayor diferencial de precios de ejercicio dará lugar a un mayor coste. Este tipo de límites permite considerar las condiciones del mercado, puesto que será bull si es alcista, y bear si es bajista, la única diferencia es que en la primera posibilidad, el precio de ejercicio de la opción comprada será inferior al de la vendida, mientras que en el segundo caso ocurre al contrario.

Una vez que hemos determinado las estrategias con opciones equivalentes a los límites, debemos determinar su uso. Si establecemos que las estrategias con opciones serían aquéllas que los accionistas deberían llevar a cabo en el mercado para garantizar el valor de su inversión, entonces los límites que fije la entidad deberían sustituir dicha operativa, es decir, el accionista no tiene que cubrir el riesgo de gestión de la entidad, tan sólo deberá cubrir su grado de aversión.

Por tanto, si una entidad fija límites estará cubriendo el riesgo medido en función de las probabilidades de martingala, dejando libertad a los accionistas para que cubran el exceso de riesgo que ellos estiman tiene su inversión, calculado según su probabilidad subjetiva, es decir, su grado de aversión al riesgo.

Así pues, si el accionista que cubriese el riesgo a través de una estrategia call sintética, sufriría un quebranto máximo igual a la prima de la put comprada, entonces el "stop loss" fijado por la entidad debería corresponderse con dicho importe. Con lo que, el riesgo máximo asumible a través de una estrategia de límites sería igual al coste de la operación de mercado que debería realizar el accionista.

Dentro de este enfoque la función objetivo sería por tanto:

$$\text{coste} = \sum_{i=1}^{n} r_i$$

Donde r será el riesgo asumido en cada actividad. La justificación de dicha igualdad se encuentra en la estrategia de arbitraje, es decir, desde la óptica del accionista, el precio de cubrirse en el mercado debe ser igual al coste de la estrategia de límites.

Una cuestión fundamental es determinar la cuantía límite de cada apartado en que se dividen los distintos niveles de la gestión, así el planteamiento de esta estrategia simétrica, nos conduce a diferenciar, dentro de los distintos precios de ejercicio empleados, cuáles constituyen límites de "stop loss", y cuáles de "hedged return".

Pero al emplear distintos niveles de precios de ejercicio, implícitamente lo que se fijan son diferentes volatilidades, y esto está interrelacionado con las medidas de riesgo que emplee la entidad.

Una vez determinadas, en términos de precio de mercado, las cuantías máximas de riesgo asumible, la cuestión es cómo repartirlas entre los distintos niveles de la organización interna (operadores) y externa (productos y contrapartidas), es decir, entraríamos en la fijación de las restricciones.

3.3. Restricciones

3.3.1. Medición: propiedades

Según las dos técnicas de determinación de límites propuestas, hay que considerar que por un lado, el "stop loss" presenta una situación extrema, y por tanto, su determinación deberá realizarse aplicando técnicas de situaciones extremas, puesto que representa una gestión pasiva; mientras que por otro, la "hedged return" supone una gestión más activa y un seguimiento más continuado, siendo más recomendables medidas de la familia VaR ("Value at Risk").

El problema es complejo, puesto que la cobertura es doble, por un lado de los recursos propios ("stop loss"), y por otro, de la rentabilidad o cuenta de resultados ("hedged return"), es decir, situaciones extremas para plazos estratégicos y situaciones anómalas para plazos operativos. Con esto estamos introduciendo una diferenciación de entornos y por tanto de métodos de estimación de los límites, es decir, se calcularán sobre diferentes horizontes temporales, para distintos intervalos de confianza y con diversas técnicas, así:

1. "Stop loss" global: constituiría, para el mayor plazo, la cobertura asumible mediante los recursos propios.

2. “Stop loss” parcial: para un plazo inferior al anterior, representaría la cobertura máxima asumible mediante los recursos propios de cada una de las categorías de riesgos, esto es, externos o internos.

3. “Hedged return” parcial: para un plazo aún menor, recogería la cobertura de las dos categorías de riesgos (externos e internos) a través de la cuenta de resultados.

4. “Hedged return” individual: sería la provisión de fondos para el menor plazo, con la intención de cubrir cada uno de los factores de riesgo considerados individualmente.

De lo expuesto se desprenden tres cuestiones clave a resolver:

1. ¿Qué técnicas deben emplearse y cuáles son las características que deben tener dichos métodos de estimación?

2. ¿Cuáles serán los horizontes temporales sobre los que realizar la estimación?

3. ¿Cuáles deben ser los intervalos de confianza sobre los realizar la estimación?

En este apartado daremos respuesta a la primera de las cuestiones, y en el siguiente a las otras dos.

Para determinar que técnicas son las idóneas en la estimación del riesgo, dentro del problema que nos ocupa, hemos de establecer las características que deben cumplir estas medidas. Con esta intención recurrimos a los axiomas que toda medida coherente del riesgo debe cumplir, así si definimos r(.) como una medida de riesgo, dichas propiedades son:

- *Traslación invariante.*

Invirtiendo una cantidad p en el activo libre de riesgo, la media de riesgo de la posición total, esto es, la cartera (x) más esa inversión p, deberá recoger una disminución igual a p:

$$r(x + p \cdot R^*) = r(x) - p$$

Donde R* es la rentabilidad del activo libre de riesgo.

Esto supone que si el activo no es el libre de riesgo, sino el mismo de la posición inicial (x), entonces:

$$\forall x = p \rightarrow r(x + p \cdot R_x) = 0$$

Esta propiedad representaría la estrategia de cobertura, y dado que ésta es la empleada en el sistema de límites propuesto, dicho sistema la deberá cumplir.

- *Subaditividad.*

Para cualquier medida coherente del riesgo se debe cumplir que:

$$r(x + y) \leq r(x) + r(y)$$

Esto garantiza la gestión descentralizada del riesgo, es decir, que operaciones independientes de filiales u operadores, por ejemplo, no repercutan negativamente sobre el riesgo global de la entidad.

Este principio establece que el riesgo estimado de forma independiente y agregado, no debe ser inferior al estimado sobre la variación del precio de la cartera en su conjunto. La explicación de esto se encuentra en la diversificación, esto es, en la correlación entre activos.

Evidentemente esta propiedad deberá aparecer en el sistema de límites.

- *Homogeneidad y positividad.*

Una medida coherente del riesgo deberá cumplir que:

$$\forall t > 0 \rightarrow r(t \cdot x) = t \cdot r(x)$$

Es decir, si el tamaño de la posición influye en su valor futuro, esto es, en su liquidación, entonces habrá que considerar el riesgo de liquidez. Pero además, y al añadir el axioma de la subaditividad, resulta que:

$$r(x_{1,1} + x_{1,2} + \cdots + x_{1,n}) = r(n \cdot x_1) \leq r(x_{1,1}) + r(x_{1,2}) + \cdots + r(x_{1,n}) = n \cdot r(x_1)$$

Parece pues que ambos axiomas son opuestos, de manera que el cumplimiento de uno u otro dependerá del riesgo de liquidez y de la normativa aplicable.

Este axioma también aparecerá en el sistema de límites.

- *Monotocidad.*

Que se representa como:

$$\text{Si } x \leq y \rightarrow r(x) \leq r(y)$$

Esto deja fuera medidas del tipo:

$$r(x) = -E_Q(x) + n \cdot \sigma_Q(x)$$

Siendo Q una probabilidad bajo la que se realizan las estimaciones y n > 0.

Aunque medidas del riesgo que empleen la semivarianza en lugar de la varianza cumplen este axioma, no cumplen la subaditividad, puesto que son de la forma:

$$r(x) = -E_Q(x) + \sigma_Q\left\{[x - E_Q(x)]^{\pm}\right\}$$

Este axioma, por tanto, lo incumplen aquellas medidas basadas en la dispersión de valores relativos o rentabilidades, cuyos importes son independientes del valor de la cartera.

- *Relevancia.*

Este axioma evita la concentración de riesgos, esto es, la medida debe detectar este problema puesto que se enuncia como:

$$\text{Si } x \leq 0 \rightarrow r(x) > 0$$

A modo de conclusión, se comprueba que al definir las restricciones o límites por niveles, es fundamental el cumplimiento de estas propiedades, pero resulta imprescindible el cumplimiento de tres de ellas, la subaditividad, la monotocidad y la homogeneidad y positividad, puesto que las restricciones forman un conjunto interrelacionado, y estas propiedades hacen referencia a la agregación y diversificación de riesgos. Si a esta exigencia unimos que las medidas tipo VaR basadas en las matrices de covarianzas incumplen los axiomas de subaditividad y concentración, según hemos comprobado al enumerar las propiedades de las medidas de riesgo, esto nos lleva a emplear otras metodologías, como el "worst case" a través de escenarios simulados o estimados, de ahí que debamos analizar en mayor profundidad técnicas relativas a escenarios extremos.

Antes de analizar las posibles técnicas de medición, conviene analizar más detenidamente alguna propiedad que dichas medidas deben cumplir, en concreto la homogeneidad y positividad y la subaditividad.

- **Homogeneidad y positividad**

Aunque inicialmente la homogeneidad y positividad se plantean desde el punto de vista del tamaño, nosotros la emplearemos dentro del sistema de límites, bajo el prisma del plazo, es decir, la transformación no será de volumen sino de horizonte temporal.

Es en este punto se hace preciso definir una característica de las distribuciones de probabilidad denominada autosimilaridad.

La autosimilaridad es la propiedad por la que unos valores de un proceso estocástico se transforman en otro para un período o intervalo temporal diferente, esto es:

$$\left(x_{1,T}; x_{2,T}; \ldots; x_{t,T}\right) = T^k \cdot \left(x_{1,1}; x_{2,1}; \ldots; x_{t,1}\right)$$

A efectos de la distribución se expresaría como:

$$x_{S,T} \overset{\text{distrib}}{\Longrightarrow} T^k x_{S,1}$$

Al aplicar esta propiedad debe tenerse en cuenta que:

$$k = \frac{1}{\alpha}$$

siendo α la estabilidad de la distribución, es decir, el número de momentos distintos de cero, o explicativos del comportamiento de la variable.

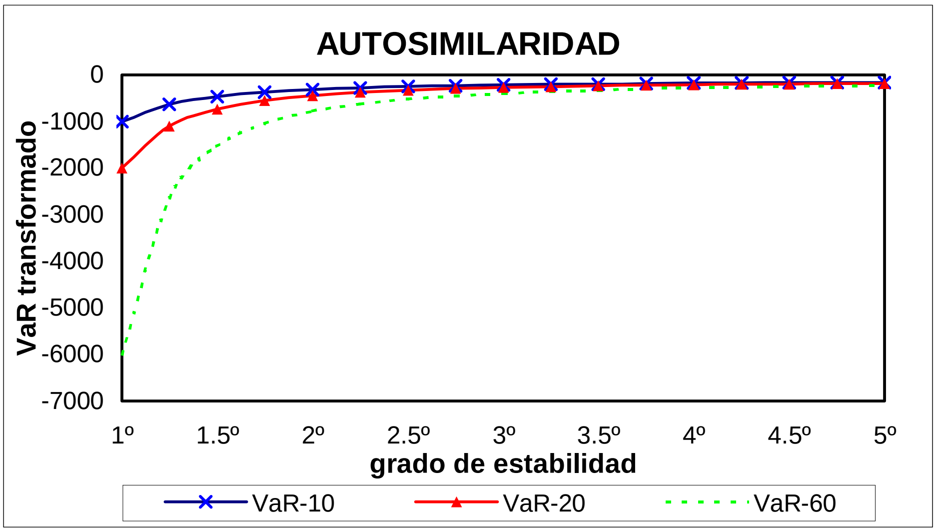
Así por ejemplo, un Browniano que sigue una distribución normal cuyo α=2, cumple la famosa regla de la raíz cuadrada del tiempo:

$$B_{S,T} = \sqrt{T} \cdot B_{S,1}$$

Pero cuando $\alpha \neq 2$, lo que representa un proceso de saltos, dicha regla no es aplicable de la misma forma:

$$x_{S,T} \overset{\text{distrib}}{\Longrightarrow} T^{1/\alpha} x_{S,1}$$

Así por ejemplo, si comparamos el resultado de transformar una estimación VaR de 1 día, de –100 unidades monetarias, a 10, 20 y 60 días, para distintos grados de estabilidad resulta que:



Por tanto, a menor grado de estabilidad la regla de la raíz cuadrada es más errónea, y al aumentar el horizonte temporal de transformación el error también crece, por el contrario disminuye al aumentar el grado de estabilidad.

Si al problema de la autosimilaridad le unimos el de la condicionalidad, resulta que el grado de estabilidad varía con la volatilidad; entonces, para solventarlo, podemos recurrir a la regresión de quantiles para realizar una transformación temporal de la estimación, así el quantil de la pérdida y_t es una función lineal de otras variables. Para ello se expresa y_t en función de las variables explicativas:

$$y_t = \beta \cdot x_{t-1} + \gamma \cdot e_t$$

En términos de quantiles sería:

$$Q_t^{\alpha} = \beta \cdot x_{t-1} + \gamma \cdot q_t^{\alpha}$$

Donde α es el intervalo de confianza y q representa el quantil Gaussiano correspondiente al error (e), puesto que como tal será independiente e idénticamente distribuido (i.i.d.), así para α=0,95, sería:

$$Q_t^{0,95} = \beta(0,95) \cdot x_t + \gamma(0,95) \cdot 1{,}65$$

Y para estimar los parámetros:

$$\min_{\beta,\gamma} = \left[\sum_{y_t \geq \beta \cdot x_{t-1} + \gamma} \alpha \cdot \left| y_t - (\beta \cdot x_{t-1} + \gamma) \right| + \sum_{y_t < \beta \cdot x_{t-1} + \gamma} (1-\alpha) \cdot \left| y_t - (\beta \cdot x_{t-1} + \gamma) \right| \right]$$

El problema de esta estimación viene dado por la escasez de observaciones en la cola de la distribución, de ahí que se proponga tomar como variable dependiente los valores estimados del quantil para un período k, a través de la transformación. Así por ejemplo una posible regresión vectorial sería:

$$Q^{\alpha}_{t,k} = a + b \cdot k + c \cdot k \cdot \sigma_{t+1} + d \cdot k^{\frac{1}{2}} \cdot \sigma_{t+1}$$

Donde k sería un vector con los diferentes horizontes temporales, y σ_{t+1} la matriz de volatilidad estimada para un período después mediante un modelo GARCH (1,1), y para cada serie de logaritmos neperianos de las rentabilidades de cada horizonte.

- **Subaditividad**

Otra propiedad fundamental en el sistema de límites es la subaditividad, y dado que su cumplimiento depende de la correlación, deberemos estudiar ésta.

Algunas cuestiones que deben tenerse en cuenta sobre la correlación y la estimación del riesgo son:

- Al medir el riesgo se necesita conocer la distribución conjunta de todos los factores de riesgo, puesto que la correlación unida a las distribuciones marginales supone que se incumpla el principio de subaditividad, como comprobamos posteriormente.
- Si los factores se comportan como una normal, dicha distribución conjunta será elipsoide o esférica, y podrá definirse a partir de las distribuciones de cada factor y las correlaciones lineales entre ellos.
- Si la distribución no es elipsoide o esférica, entonces para una determinada correlación, existen infinitas posibles distribuciones, además conocidas las distribuciones de los factores, cualquier combinación lineal entre –1 y +1 de ellas, no será una distribución conjunta adecuada, pues fuera del mundo elipsoide el intervalo que fija la posible combinación lineal, será:

$$0 \subset [\rho_{\min.}; \rho_{\text{máx.}}] \in [-1; +1]$$

El significado de una correlación mínima y máxima es el de la perfecta correlación negativa y positiva, respectivamente, luego perfectamente correlacionado no significa siempre que el valor absoluto de la correlación sea 1, así como que su valor sea 0, tampoco significa que exista independencia entre los factores.

- Transformaciones de los factores afectan a la correlación, esto es:

$$\rho(x, y) \neq \rho[\ln(x), \ln(y)]$$

- La correlación sólo está definida cuando la varianza es finita, y por tanto, la correlación lineal no será una medida adecuada de la dependencia para distribuciones de colas gruesas y varianzas infinitas.

Para evitar estos problemas se puede trabajar con el rango de correlación (Kendall y Spearman), definido como:

$$\text{rank}\rho(x, y) = \rho[F_x(x), F_y(y)]$$

Donde F es la función de distribución de la variable. Pero no solventamos todos los problemas, aún permanece el hecho de que un valor igual a cero representa la independencia, y además no informa directamente sobre la dependencia de los factores. Sin olvidar que conlleva una compleja manipulación respecto a la correlación lineal.

La solución propuesta por EMBRECHTS, MC NEIL y STRUMANN (1999) son las cópulas o duplas (D), esto es, si hay dos factores de riesgo x e y, cuyas distribuciones son F(x) y G(y), y además se conoce la distribución conjunta H(·), entonces puede determinarse la probabilidad condicional de que un factor tome un valor, habiendo tomado el otro un determinado precio, luego:

$$H(x, y) = D[F(x), G(y)]$$

Una característica de las duplas es que son invarianes ante incrementos y transformaciones continuas de x e y, lo que no cumple la correlación ni el rango de correlación.

Además las duplas presentan límite superior e inferior, así:

$$D_d = \text{máx}(F_1(x_1) + F_2(x_2) + \cdots + F_n(x_n) - 1; 0) \leq D(F_1(x_1), F_2(x_2), \cdots, F_n(x_n)) \leq D_u = \min(F_1(x_1), F_2(x_2), \cdots, F_n(x_n))$$

De manera que:

- Si D=D_u, las variables están perfecta y positivamente dependientes.
- Si D=D_d, entonces serán perfecta y negativamente dependientes.

Como consecuencia de lo anterior:

$$\mathrm{VaR}_\alpha(x+y) = H^{-1}(\alpha) \neq \left[\mathrm{VaR}_\alpha^2(x) + \mathrm{VaR}_\alpha^2(y) + 2\cdot\rho\cdot\mathrm{VaR}_\alpha(x)\cdot\mathrm{VaR}_\alpha(y)\right]^{\frac{1}{2}}$$
$$H^{-1}(\alpha) = F_x^{-1}\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) + G_y^{-1}\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)$$

Donde F_x y G_y representan las distribuciones marginales de cada variable. De manera que si:

$$D = D_u \rightarrow \mathrm{VaR}_\alpha(x+y) > \mathrm{VaR}_\alpha(x) + \mathrm{VaR}_\alpha(y)$$

Siendo la diferencia con la correlación lineal:

$$H^{-1}(\alpha) - \left[\mathrm{VaR}_\alpha(x) + \mathrm{VaR}_\alpha(y)\right] = R$$

Donde R será además el incumplimiento del axioma de la subaditividad, de manera que correlaciones positivas infraestiman el riesgo y negativas lo sobrestiman, siendo el problema conocer el grado de dependencia de los factores de riesgo.

3.3.2. Medición: técnicas

Una vez estudiadas las propiedades que debe cumplir el sistema de límites, analizaremos las diversas técnicas que se emplean en la estimación de eventos extremos.

En el estudio de contingencias es preciso distinguir entre:

- ✓ Contingencias pequeñas y probables.
- ✓ Contingencias grandes y poco probables.

Para lo cual, se emplean distintas funciones de distribución F(x), dentro de las que destacan:

- ✓ Contingencias pequeñas: exponencial, gamma y normal invertida.
- ✓ Contingencias grandes: lognormal, Pareto, Benktander, Burr, Weibull y loggamma.

Un problema al aplicar estas distribuciones en las grandes contingencias es el originado por las colas gruesas, siendo necesario recurrir a distribuciones subexponenciales, definidas como aquellas que decaen hacia cero más lentamente que las exponenciales. Así la función característica de la distribución será:

$$\Phi = E(e^{i \cdot t \cdot x}) = e^{i\gamma \cdot t - c \cdot |t|^{\alpha} \cdot [1 - i\beta \cdot \mathrm{sign}(t) \cdot z]}$$

Donde γ es una constante real y:

$$\begin{aligned} & c > 0 \\ & \alpha \in (0,2] \\ & \beta \in [-1,1] \\ & z = \begin{cases} \mathrm{Si}\ \alpha \neq 1 \rightarrow \mathrm{tg}\left(\frac{\pi \cdot \alpha}{2}\right) \\ \mathrm{Si}\ \alpha = 1 \rightarrow -\frac{2}{\pi} \cdot \ln|t| \end{cases} \end{aligned}$$

Estos parámetros caracterizan la distribución y representan:

- ✓ c es la escala constante.
- ✓ β describe la asimetría, de manera que:
  - Si $0<\beta\leq 1 \rightarrow$ asimetría positiva (derecha).
  - Si $-1\leq\beta<0 \rightarrow$ asimetría negativa (izquierda).
- ✓ α es el factor clave que definirá los momentos, colas y puntos asintóticos de las sumas. Así cuánto menor es su valor, mayor será el apuntamiento de la distribución, estando por tanto relacionado con la curtosis.
- ✓ γ es un parámetro de situación.

A partir de estos parámetros puede establecerse la distribución, pero existen situaciones en las que no es posible, en estos casos puede aplicarse la expansión asintótica:

$$G_t(x) = n(x) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{Q_i(x)}{t^{i/2}}$$

Siendo n(x) la función normal de densidad y:

$$Q_1(x) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\right) \cdot \left(\frac{H_2(x)}{6} \cdot \frac{E(x-\mu)^3}{\sigma^3}\right)$$

$$Q_2(x) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\right) \cdot \left[\frac{H_5(x)}{72} \cdot \left(\frac{E(x-\mu)^3}{\sigma^3}\right)^2 + \frac{H_3(x)}{24} \cdot \left(\frac{E(x-\mu)^4}{\sigma^4} - 3\right)\right]$$

Donde:

$$H_2(x) = x^2 - 1$$
$$H_3(x) = x^3 - 3x$$
$$H_5(x) = x^5 - 10x^3 + 15x$$

Evidentemente si $G_t(x)$ fuese la normal, y dado que la asimetría es nula y su curtosis 3, Q_1 y Q_2 serían cero.

Dentro del estudio de valores extremos hay que considerar:

- ✓ La distribución Generalizada de Valor Extremo (GVE), que describe el límite de una distribución de máximo normalizado. A partir de esta puede estimarse el denominado MaxVaR, que representaría el máximo de las fluctuaciones de una variable próximas al extremo, y cuya estimación se realizaría a través de los excesos máximos.
- ✓ La distribución Generalizada de Pareto (GP), que representa el exceso de una distribución sobre un determinado nivel. En finanzas permite la estimación del "shortfall", o exceso medio sobre un nivel alto dado.

Ambas distribuciones pueden representarse como:

$$GVE(x) = \begin{cases} \text{Si } \varepsilon \neq 0 \rightarrow e^{-(1+\varepsilon \cdot x)^{-\frac{1}{\varepsilon}}} \\ \text{Si } \varepsilon = 0 \rightarrow e^{-e^{-x}} \end{cases}$$

$$GP(x) = \begin{cases} \text{Si } \varepsilon \neq 0 \rightarrow 1 - \left(1 + \varepsilon \cdot \frac{x}{\beta}\right)^{-\frac{1}{\varepsilon}} \\ \text{Si } \varepsilon = 0 \rightarrow 1 - e^{-\frac{x}{\beta}} \end{cases}$$

Donde:

$$\text{Si } \varepsilon > 0 \rightarrow \varepsilon = \alpha^{-1}$$
$$\text{Si } \varepsilon = 0$$
$$\text{Si } \varepsilon < 0 \rightarrow \varepsilon = -\alpha^{-1}$$

Según todo lo anterior, el primer paso a seguir en la estimación de los fenómenos de la cola es la determinación del parámetro α o inverso del índice de la cola (ε).

Si x_i es una secuencia de independientes e idénticamente distribuidas variables aleatorias, la muestra ordenada será:

$$x_{1,t} \geq x_{2,t} \geq \ldots \geq x_{t,t}$$

Donde:

$$x_{t,t} = \min(x_1, \ldots, x_t) = m_t$$
$$x_{1,t} = \text{máx}(x_1, \ldots, x_t) = M_t$$

De manera que $x_{k,t}$ será dentro de una muestra de t valores el estadístico de mayor orden k, o el k-ésimo estadístico.

Estos estadísticos se emplean en la estimación de colas, quantiles y probabilidades de exceso sobre un nivel determinado. Así, a través del estimador de Hill, el índice de la cola sería:

$$\hat{\alpha} = \frac{1}{k-1}\sum_{i=1}^{k-1} \ln(x_{i,t}) - \ln(x_{k,t}) = \frac{1}{k-1}\sum_{i=1}^{k-1} \ln(Q_{i,t}) - \ln(Q_{k,t}) \Rightarrow \hat{\varepsilon} = \frac{1}{\hat{\alpha}}$$

Para estimar la distribución GVE puede realizarse un test de comparación de distribuciones con la serie de datos, en función de la correspondencia entre los valores de cada orden estadístico. Para ello se determina:

$$F\left(\frac{x-\mu}{\Psi}\right)$$

Donde μ representa la localización y ψ la pendiente o escala. Suelen estimarse mediante una regresión lineal de los datos:

$$\hat{x} = \mu + \Psi \cdot x$$

De esta manera, la distribución GVE vendrá dada por:

$$GVE = e^{-\left(1+\varepsilon \cdot \frac{x-\mu}{\Psi}\right)^{-1/\varepsilon}}$$
$$1+\varepsilon \cdot \frac{x-\mu}{\psi} > 0$$

Donde las distribuciones típicas empleadas son la Fréchet (F), Weibull (W) y Gumbel (G):

$$GVE = \begin{cases} Si\begin{cases} \varepsilon = \frac{1}{\alpha} > 0 \\ x > \mu - \psi \cdot \alpha \end{cases} \rightarrow GVE_F\left(1 + \frac{x-\mu}{\alpha \cdot \psi}\right) \\ Si\begin{cases} \varepsilon = -\frac{1}{\alpha} < 0 \\ x < \mu - \psi \cdot \alpha \end{cases} \rightarrow GVE_W\left[-\left(1 - \frac{x-\mu}{\alpha \cdot \psi}\right)\right] \\ Si\begin{cases} \varepsilon = 0 \\ x \in R \end{cases} \rightarrow GVE_G\left(\frac{x-\mu}{\psi}\right) \end{cases}$$

En cuanto al cálculo de los parámetros que definen la distribución GVE, si los datos disponibles son i.i.d., entonces, a partir del valor de ε obtenido del estimador de Hill, el método que puede emplearse para calcular μ y ψ es la máxima verosimilitud.

De manera que una vez estimados los parámetros, el p-quantil de la cola, que representaría el MaxVaR, será:

$$\hat{x}_p = \hat{\mu} - \frac{\hat{\Psi}}{\hat{\varepsilon}}\left[1 - [-\ln(p)]^{-\hat{\varepsilon}}\right]$$

Pero cuando el índice de la cola (ε) es mayor que cero, KOEDIJK, HUISMAN y POWNALL (1998) proponen emplear, en lugar de la distribución Fréchet, una t-student, ya que presenta una cola más gruesa que la normal. El inconveniente es determinar los grados de libertad de la misma. Para ello, en primer lugar estiman el índice de la cola como:

$$\begin{aligned} &H^* = \frac{1}{k} \cdot \sum_{i=1}^{k} [\ln(x_i) - \ln(x_{k+1})] \\ &H^* = a + b \cdot x_i + e_i \\ &\varepsilon = \frac{1}{a} \\ &\forall i = 1, \ldots, k \end{aligned}$$

Obtenido el índice debe hacerse una correcta interpretación, pues representa los grados de libertad de una distribución de t-student con:

$$\begin{aligned} &\mu = 0 \\ &\sigma^2 = \frac{a}{a-2} \end{aligned}$$

Evidentemente, ésta no es la distribución buscada, así pues habrá que adaptarla a la real. Para ello se estima:

$$\lambda = \frac{\sigma^*}{\left(\frac{a}{a-2}\right)^{1/2}}$$

A partir de este cociente entre la desviación de la muestra (σ^*) y la correspondiente a la distribución de student, el riesgo sería:

$$\text{Riesgo} = V_0 \cdot \lambda \cdot t$$

Donde V_0 será el valor actual de la posición y t representará el valor de t-student según el índice de la cola y el nivel de confianza.

Respecto a la función de exceso medio, se define para un nivel dado u como:

$$e(u) = E[x - u \mid x < u]$$
$$0 \leq u < x_F$$

Siendo X_F el punto final derecho de la distribución. En finanzas e(u) representaría el "shortfall", cambiándose el punto final derecho por el izquierdo, y u sería el VaR para un determinado nivel de confianza.

La estimación de ε y β puede efectuarse por máxima verosimilitud o según los momentos probables ponderados, siendo finalmente el "shortfall":

$$e(u) = E[x - u \mid x > u] = \frac{\hat{\beta} + \hat{\varepsilon} \cdot u}{1 - \hat{\varepsilon}}$$

Y el percentil correspondiente al "shortfall" para un nivel de confianza p será:

$$\hat{x}_p = \text{VaR} + \frac{\hat{\beta}}{\hat{\varepsilon}} \cdot \left\{ \left[\frac{t}{N} \cdot (1 - p) \right]^{-\hat{\varepsilon}} - 1 \right\}$$

Donde t es el intervalo temporal y N el número de excesos sobre el VaR (VaR = u).

Pero la teoría de valores extremos tampoco es la panacea, existen una serie de problemas a tener en cuenta:

- Escasez de datos en la cola para realizar el análisis.
- Elección del orden estadístico para estimar la cola de la distribución, es decir, a partir de que observación se considera que comienza ésta. Así si el orden elegido es muy grande para

trabajar con muchos datos, el análisis se aleja de la cola, y si el número es pequeño, aunque se reduzca la varianza, aumenta el error. Esto se ha intentado solucionar a través de una regresión no lineal entre los eventos de la cola empírica y los valores extremos observados:

$$\text{prob}(x > y) = k \cdot y^{-\alpha} \cdot \left(1 + c \cdot y^{-d}\right)$$

- Otro problema es si k, en la regresión anterior, es constante o no, lo que va unido al cumplimiento de la autosimilaridad. Este principio, según se analizó, permite la transformación temporal de las estimaciones según el índice de la cola:

$$V_1 \cdot T^{\frac{1}{\alpha}} \cong V_T$$

Pero en la práctica se comprueba que según el nivel inicial de la volatilidad la regla no es constante sino que se debe expresar como:

$$V_1 \cdot T^{\lambda_t} \cong V_T$$

Donde λ dependerá de la volatilidad[3], así para un nivel bajo de ésta, el nivel futuro será alto, y viceversa, puesto que existe una reversión a la media, con lo que a menor volatilidad mayor valor de λ, y a mayor volatilidad menor será su valor, pero si la volatilidad está próxima a la media su valor sería:

$$\lambda_t \cong \frac{1}{\alpha}$$

- Por último, con relación a la rentabilidad de los activos surge otro inconveniente, dado que ésta es condicional y heterocedástica como se comprueba hoy día, con lo que la teoría de eventos extremos al considerar que las variables son i.i.d., no sería aplicable. Esto hace que sea fundamental la elección del modelo de valoración, puesto que si define correctamente el comportamiento de la volatilidad, los residuos serán i.i.d., de forma que podría aplicarse la teoría de valores extremos para analizar éstos, es decir, la cola. Surge así una propuesta consistente en estimar la volatilidad a través de un modelo GARCH (1,1), y posteriormente determina el error (e):

[3] Por ello anteriormente, al tratar la autosimilaridad, se introdujo la regresión de quantiles como forma de modelizar este comportamiento.

$$\hat{x}_t = \varphi \cdot x_{t-1}$$
$$e_t = x_t - \hat{x}_t$$
$$\hat{\sigma}_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot e_{t-1}^2 + \beta \cdot \sigma_{t-1}^2$$

Una vez estimados los parámetros se hallan los errores (z), para cada momento de la base histórica en que se hubiesen producido pérdidas:

$$z_t = \frac{x_t - \hat{x}_t}{\hat{\sigma}_t}$$

A continuación, para estimar la distribución GP, habrá que estudiar la cola de los residuos z. De manera que el nivel de z para un quantil (q) equivalente para el nivel u será:

$$\hat{z}_q = z_{p+1} + \frac{\beta}{\hat{\varepsilon}} \cdot \left[\left(\frac{1-q}{\frac{p}{n}} \right)^{-\hat{\varepsilon}} - 1 \right]$$

Donde n será el número total de observaciones de z y p el orden estadístico empleado en la estimación del índice de la cola (ε).

Finalmente, el "shortfall" condicional para t+1 sería:

$$\hat{S}_q = \hat{x}_{t+1} + \hat{\sigma}_{t+1} \cdot \hat{z}_q \cdot \left(\frac{1}{1-\hat{\varepsilon}} + \frac{\beta - \hat{\varepsilon} \cdot z_{p+1}}{(1-k) \cdot \hat{z}_q} \right)$$

Para la estimación del riesgo bajo la perspectiva de la estrategia "hedged return", y habiendo quedado demostrado la necesidad de emplear técnicas de simulación de casos extremos, se presentan dos posibilidades, la simulación de Monte Carlo y la histórica.

El método de Monte Carlo considera, al tomar el percentil correspondiente al nivel de confianza buscado, que el comportamiento del precio viene dado por un movimiento Browniano. Para comprender el alcance de esta reflexión debemos recurrimos nuevamente a la autosimilaridad, esto es, la propiedad por la que los valores de un proceso estocástico se transforman en otros con intervalo temporal diferente:

$$S_{i,t} \equiv t^k \cdot S_{i,1}$$
$$k = \frac{1}{\alpha}$$

Donde t representa el momento temporal y α es el grado de estabilidad de la misma. Así, una distribución normal es de grado 2, con lo que el proceso Browniano (B) tendrá una transformación temporal del tipo:

$$W_t \equiv t^{\frac{1}{2}} \cdot \varepsilon_1$$
$$\varepsilon_1 \equiv N(0,1)$$

Entonces, al simular el precio de la posición resultaría:

$$S_{i,t} \equiv S_0 \cdot e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma \cdot \sqrt{t}\,\varepsilon_{i,1}}$$

Pero si el grado de estabilidad fuese menor de 2, lo cual es habitual en series financieras, entonces es más correcto:

$$S_{i,t} \equiv S_0 \cdot e^{\mu \cdot t} \cdot \lim_{n \to \infty} \left\{ \prod_{j=1}^{n} \left[1 + \sigma \cdot \left(\xi_j^i - \xi_{j-1}^i \right) \right] \right\}$$

Por tanto, se estaría pasando de un proceso Ornstein-Uhlenbech:

$$y_t = e^{-\frac{1}{2} \cdot t} \cdot B_t$$

A otro del tipo general:

$$y_t = e^{-\frac{1}{\alpha} \cdot t} \cdot \xi_t$$

Esto supone que a medida que las colas de la distribución son más gruesas, lo cual ocurre cuánto mayor es el horizonte temporal de estimación, el riesgo se vuelve asintótico y su grado de estabilidad disminuye por debajo de 2, por lo que la transformación temporal o efecto temporal tendrá menor incidencia que en la distribución normal, esto es:

$$t^{\frac{1}{2}} > t^{\frac{1}{\alpha}}$$

Este será un primer condicionante al transformar estimaciones bajo condiciones de normalidad a otras ajenas a dichas premisas, y de ahí nace la necesidad de considerar otros procesos, como el hiperbólico, o recurrir a la simulación histórica.

3.3.3. Determinación de ciertos parámetros de estimación

Una vez que se han establecido los dos tipos de técnicas en los límites, así como las metodologías más convenientes para su estimación, es preciso delimitar dos parámetros básicos para llevar a cabo dichos cálculos, nos estamos refiriendo al horizonte temporal de estimación y al intervalo de confianza de la misma.

Respecto al período u horizonte temporal ha de considerarse la diferencia que existe entre las dos técnicas aquí propuestas, es decir, el "stop loss" debería abarcar un período superior a la "hedged return".

Una primera solución consistiría en hacer corresponder el período de medición con el período de control, esto es, se fijaría de acuerdo a los plazos previstos presupuestariamente o de información a terceros, por ejemplo mensual o trimestralmente. Pero esta propuesta, aunque pretende eliminar la subjetividad de la elección, no está en consonancia con el objetivo de optimizar el uso de los recursos. Por ello recurrimos a la teoría de valores extremos, donde aparece el concepto de *tiempo medio entre eventos extremos*.

Así, si se define β_i como:

$$\beta_i = \begin{cases} 1; x_i > u \\ 0; x_i \leq u \end{cases}$$

Siendo u un alto nivel dado, y considerando que los β_i son independientes e idénticamente distribuidos siguiendo una Bernoulli, entonces la probabilidad de que un nivel sea superado en un determinado intervalo t será:

$$P(L(u) \leq t) = 1 - (1-p)^t$$

Donde L(u) será:

$$L(u) = L_i(u) = \min(i | x_i > u)$$

De manera que dicho plazo sería:

$$E[L(u)] = p^{-1}$$

En el caso que nos ocupa, la estimación de límites, u sería el coste de la estrategia sintética de cobertura del accionista, y β se estimaría sobre la base histórica disponible de resultados, tomando valor 1 si el resultado supera al coste, y 0 en el resto. A partir de β, y el nivel de confianza correspondiente al coste dentro del histograma de resultados, se determinaría la probabilidad, y finalmente el horizonte temporal.

Otro parámetro clave en la estimación de los límites es el nivel de confianza. Normalmente suele fijarse siguiendo criterios normativos o de aversión al riesgo, pero nuestra intención es dotar de objetividad su cálculo, y por supuesto, según el objetivo de optimización del uso de los recursos. Por todo ello, recurrimos dentro de la teoría de eventos extremos al *índice extremo*.

Para una variable aleatoria cualquiera x_i, un índice extremo es un valor comprendido entre 0 y 1, denominado θ, tal que:

$$\lim_{t\to\infty} t\overline{F}(u_t) = \iota$$
$$\lim_{t\to\infty} P(M_t \le u_t) = e^{-\theta \cdot \iota}$$
$$\theta > 0$$

La interpretación de θ, resulta más comprensible mediante un ejemplo. Supongamos que para cubrir un evento al 99% durante un período de 2 meses, son precisas unas reservas de 110 u.m. en el 99 percentil y de 140 u.m. en el 99´95 percentil. Para comprender la incidencia de θ, tomaremos dos valores (0,5 y 1).

Así si θ=1:

$$0{\acute{}}99^{1\cdot 2} \cong 98\%$$
$$0{\acute{}}9995^{1\cdot 2} \cong 99{\acute{}}9\%$$

Entonces las reservas necesarias serán de 140 u.m.

Pero si θ=0,5:

$$0{,}99^{0{,}5\cdot 2} = 99\%$$
$$0{,}9995^{0{,}5\cdot 2} = 99{\acute{}}95\%$$

Entonces sólo se precisan 110 u.m.

Para estimar θ pueden citarse tres métodos:

$$\hat{\theta}_1 = \frac{k}{t} \cdot \frac{\ln\left(1 - \frac{J}{K}\right)}{\ln\left(1 - \frac{N}{t}\right)}$$

$$\hat{\theta}_2 = \frac{J}{N}$$

$$\hat{\theta}_3 = \frac{\sum_{i=1}^{n-r} I_{i,t}}{N}$$

Donde N es el número de valores que exceden del nivel u, t es la muestra total, K es el número de submuestras en que se divide la muestra total, r es el tamaño de cada submuestra, y J es el número de submuestras que presentan excesos sobre u. De manera que:

$$t = r \cdot k$$
$$I_{i,t} = \begin{cases} 1;\ \text{si}\ \{x_i > u_t ; x_{i+1} \leq u_t ; \ldots ; x_{i+r} \leq u_t\} \\ 0;\ \text{resto.} \end{cases}$$

El empleo de este índice en la determinación del nivel de confianza con que deben estimarse los límites, exige que previamente sea determinado el coste de la estrategia de cobertura sintética que realizaría el accionista, lo que equivaldría a las reservas, y también el horizonte temporal de estimación. Conocido dicho coste y plazo, se estimaría el índice extremo, así como el percentil que se corresponde con el coste de cobertura dentro del histograma de resultados posibles. De manera que el nivel de confianza óptimo sería el resultante de elevar el nivel correspondiente al coste, por el producto del índice extremo y el horizonte temporal óptimo.

3.3.4. Definición de restricciones y niveles de la organización afectados

La determinación de los límites para los diferentes niveles de la organización supone que previamente se defina la matriz de riesgos de ésta. Además, tanto en su vertiente “stop loss” como en la de “hedged return” es preciso que los operadores conozcan las metodologías de estimación de riesgos que emplea la entidad, las comprendan, utilicen y sepan como serán implementadas.

La matriz de riesgos tendrá doble entrada, por un lado reflejará los niveles de organización de la actividad en la entidad (“top-down”), y por otro, las operaciones según los factores de riesgo que conlleven (“bottom-up”). Así a modo de ejemplo:

- Factores INTERNOS: se pueden considerar independientes[4] entre si en la toma de decisiones de inversión.
  - Nivel 1º: *Actividades* que desarrolla la entidad, y que a su vez se subdividen en el segundo nivel.
  - Nivel 2º: *Áreas* que también se subdividen formando el tercer nivel.
  - Nivel 3º: *Operadores*.
- Factores EXTERNOS: se considera que puede existir correlación entre ellos.
  - Nivel 1º: *Mercados* en los que opera la entidad realizando diferentes actividades. Se subdivide en el segundo nivel.
  - Nivel 2º: *Productos* en que negocia la entidad dentro de cada uno de los mercados en que opera, y que se subdivide en el nivel siguiente.
  - Nivel 3º: *Contrapartidas* de los productos u operaciones realizadas. Así por ejemplo para un mercado organizado cualquier producto negociado, la contrapartida sería el propio mercado, pero si al mismo tiempo se negocia en un mercado "Over The Counter" (OTC), la contrapartida será diferente.

Ejemplos de esta subdivisión son los siguientes:

- Factores INTERNOS: consideremos una entidad que desarrolla 2 actividades, que a su vez se dividen en 2 áreas de negocio con 1 operador por área, el resultado de la división sería el siguiente:

Operador (1,1,1)
Área (1,1)
Operador (1,1,2)
Actividad (1)
Operador (1,2,1)
Área (1,2)
Operador (1,2,2)

Operador (2,1,1)
Área (2,1)

[4] La consideración de la toma de decisiones independientes dentro de la entidad, atiende al principio de libertad-responsabilidad de cada director de área, por tanto, este sistema también indicaría en que medida el personal es responsable de sus actos en consonancia con el objetivo global de la institución, y podría extraerse un sistema secundario de remuneración, esto es, fijar una prima por objetivo alcanzado en términos de riesgo.

Actividad (2)

- Operador (2,1,2)
- Área (2,2)
  - Operador (2,2,1)
  - Operador (2,2,2)

- Factores EXTERNOS: supongamos que la entidad anterior opera en 2 mercados, en cada uno de ellos en 2 productos, y para cada uno de éstos tiene a su vez 2 contrapartidas diferentes, de esta forma resultaría:

- Mercado (a)
  - Producto (a,a)
    - Contrapartida (a,a,a)
    - Contrapartida (a,a,b)
  - Producto (a,b)
    - Contrapartida (a,b,a)
    - Contrapartida (a,b,b)

- Mercado (b)
  - Producto (b,a)
    - Contrapartida (b,a,a)
    - Contrapartida (b,a,b)
  - Producto (b,b)
    - Contrapartida (b,b,a)
    - Contrapartida (b,b,b)

De esta forma las potenciales matrices de covarianzas en función de los criterios de independencia y dependencia fijados anteriormente, esto es, para los factores internos no habría covarianza ya que la correlación es cero, y para los factores externos si existiese, vendrían representadas por el subíndice y el superíndice correspondientes, serían:

$$\sum(\text{Factores internos}) = \begin{pmatrix} \sigma^2_{1,1,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2_{1,1,2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2_{1,2,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma^2_{1,2,2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma^2_{2,1,1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma^2_{2,1,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma^2_{2,2,1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma^2_{2,2,2} \end{pmatrix}$$

$$\sum(\text{Factores externos})=\begin{pmatrix}
\sigma^{a,a,a}_{a,a,a} & \sigma^{a,a,b}_{a,a,a} & \sigma^{a,b,a}_{a,a,a} & \sigma^{a,b,b}_{a,a,a} & \sigma^{b,a,a}_{a,a,a} & \sigma^{b,a,b}_{a,a,a} & \sigma^{b,b,a}_{a,a,a} & \sigma^{b,b,b}_{a,a,a} \\
\sigma^{a,a,a}_{a,a,b} & \sigma^{a,a,b}_{a,a,b} & \sigma^{a,b,a}_{a,a,b} & \sigma^{a,b,b}_{a,a,b} & \sigma^{b,a,a}_{a,a,b} & \sigma^{b,a,b}_{a,a,b} & \sigma^{b,b,a}_{a,a,b} & \sigma^{b,b,b}_{a,a,b} \\
\sigma^{a,a,a}_{a,b,a} & \sigma^{a,a,b}_{a,b,a} & \sigma^{a,b,a}_{a,b,a} & \sigma^{a,b,b}_{a,b,a} & \sigma^{b,a,a}_{a,b,a} & \sigma^{b,a,b}_{a,b,a} & \sigma^{b,b,a}_{a,b,a} & \sigma^{b,b,b}_{a,b,a} \\
\sigma^{a,a,a}_{a,b,b} & \sigma^{a,a,b}_{a,b,b} & \sigma^{a,b,a}_{a,b,b} & \sigma^{a,b,b}_{a,b,b} & \sigma^{b,a,a}_{a,b,b} & \sigma^{b,a,b}_{a,b,b} & \sigma^{b,b,a}_{a,b,b} & \sigma^{b,b,b}_{a,b,b} \\
\sigma^{a,a,a}_{b,a,a} & \sigma^{a,a,b}_{b,a,a} & \sigma^{a,b,a}_{b,a,a} & \sigma^{a,b,b}_{b,a,a} & \sigma^{b,a,a}_{b,a,a} & \sigma^{b,a,b}_{b,a,a} & \sigma^{b,b,a}_{b,a,a} & \sigma^{b,b,b}_{b,a,a} \\
\sigma^{a,a,a}_{b,a,b} & \sigma^{a,a,b}_{b,a,b} & \sigma^{a,b,a}_{b,a,b} & \sigma^{a,b,b}_{b,a,b} & \sigma^{b,a,a}_{b,a,b} & \sigma^{b,a,b}_{b,a,b} & \sigma^{b,b,a}_{b,a,b} & \sigma^{b,b,b}_{b,a,b} \\
\sigma^{a,a,a}_{b,b,a} & \sigma^{a,a,b}_{b,b,a} & \sigma^{a,b,a}_{b,b,a} & \sigma^{a,b,b}_{b,b,a} & \sigma^{b,a,a}_{b,b,a} & \sigma^{b,a,b}_{b,b,a} & \sigma^{b,b,a}_{b,b,a} & \sigma^{b,b,b}_{b,b,a} \\
\sigma^{a,a,a}_{b,b,b} & \sigma^{a,a,b}_{b,b,b} & \sigma^{a,b,a}_{b,b,b} & \sigma^{a,b,b}_{b,b,b} & \sigma^{b,a,a}_{b,b,b} & \sigma^{b,a,b}_{b,b,b} & \sigma^{b,b,a}_{b,b,b} & \sigma^{b,b,b}_{b,b,b}
\end{pmatrix}$$

Lógicamente, dichas matrices podrían estimarse a distintos niveles, generando así una serie de límites en escala, es decir, unos contendrían a los siguientes, por ejemplo la matriz a nivel 2, sería:

$$\sum\nolimits_2^{\text{INTERNOS}}=\begin{pmatrix}
\sigma^2_{1,1} & 0 & 0 & 0 \\
0 & \sigma^2_{1,2} & 0 & 0 \\
0 & 0 & \sigma^2_{2,1} & 0 \\
0 & 0 & 0 & \sigma^2_{2,2}
\end{pmatrix}$$

$$\sum\nolimits_2^{\text{EXTERNOS}}=\begin{pmatrix}
\sigma^{a,a}_{a,a} & \sigma^{a,b}_{a,a} & \sigma^{b,a}_{a,a} & \sigma^{b,b}_{a,a} \\
\sigma^{a,a}_{a,b} & \sigma^{a,b}_{a,b} & \sigma^{b,a}_{a,b} & \sigma^{b,b}_{a,b} \\
\sigma^{a,a}_{b,a} & \sigma^{a,b}_{b,a} & \sigma^{b,a}_{b,a} & \sigma^{b,b}_{b,a} \\
\sigma^{a,a}_{b,b} & \sigma^{a,b}_{b,b} & \sigma^{b,a}_{b,b} & \sigma^{b,b}_{b,b}
\end{pmatrix}$$

Finalmente, la matriz de riesgos por factores externos a un nivel de contrapartida (c) y factores internos al de operadores (o), esto es, al máximo nivel de desagregación, sería similar a la siguiente:

	o (1,1,1)	**o (1,1,2)**	**o (1,2,1)**	**o (1,2,2)**	**o (2,1,1)**	**o (2,1,2)**	**o (2,2,1)**	**o (2,2,2)**
c (a,a,a)	X	O	O	X	X	O	O	O
c (a,a,b)	O	X	O	O	O	O	O	X
c (a,b,a)	O	O	O	X	X	X	O	O
c (a,b,b)	O	O	X	X	O	O	X	O
c (b,a,a)	X	X	X	X	O	O	O	O
c (b,a,b)	X	O	O	X	O	X	X	O
c (b,b,a)	X	X	O	X	X	X	X	X
c (b,b,b)	O	X	O	O	X	X	X	X

Donde X y O representa respectivamente puntos con y sin riesgo. Aunque se trata de un ejemplo, y los signos se han fijado aleatoriamente, no puede pasarse por alto que a pesar de la simplicidad de esta matriz, la información que suministra es muy valiosa, así a modo de ejemplo, el nivel organizativo ("top-down") o(1,2,2) y el nivel de riesgo ("bottom-up") c(b,b,a), son los puntos más sensibles de la entidad.

Una vez determinados los factores de riesgo, la cuestión sería plantear el sistema de límites. Esto se realizará a diferentes niveles de la organización, así siguiendo con el caso propuesto, resultaría el siguiente:

a) Planteamiento de primer nivel: MERCADO y ACTIVIDAD

Función objetivo A:

$$\text{coste sintético}_{ht_1} = r_{ht_1}$$

Esta función recoge la igualdad que debe existir entre la estrategia sintética de cobertura del accionista y el consumo de recursos propios, para un período de ht_1.

Este sistema por tanto, sólo indica cuánto deben arriesgarse los recursos propios, pero no en que activos concretos, ya que esto último será labor del personal, y vendrá medido a través de la rentabilidad esperada.

Restricción nº 1.A:

$$r_{ht_1} \leq r^1_{ht_1} + r^2_{ht_1}$$

Esta primera restricción recoge aquello que no aparece en la función objetivo, es decir, la relación o correlación entre mercados, o entre actividades. Esto es, el riesgo agregado debe ser inferior a la suma de los riesgos, debido evidentemente a una correcta política de diversificación, luego se está reflejando la propiedad de subaditividad.

Restricción nº 2.A:

$$r_{ht_2} \leq r^1_{ht_2} + r^2_{ht_2} \leq t^{ht_1}_{ht_2} \cdot r_{ht_1}$$
$$ht_1 > ht_2$$

Donde t representa transformación temporal de la estimación.

Dentro de esta restricción la primera parte de la desigualdad refleja la misma idea de diversificación que la anterior sólo que a un plazo menor. En cuánto a la segunda parte, representaría que el límite a menor período no deberá superar el límite de período superior en media, esto es, su equivalente tras la transformación temporal, y por tanto, recogería la propiedad de homogeneidad y positividad.

Restricción nº 3.A:

$$r_{ht_3} \leq r^1_{ht_3} + r^2_{ht_3} \leq t^{ht_2}_{ht_3} \cdot r_{ht_2} \leq t^{ht_1}_{ht_3} \cdot r_{ht_1}$$
$$ht_1 > ht_2 > ht_3$$

Esta restricción representa lo mismo que la anterior, pero para plazos menores.

Restricción nº 4.A:

$$r_{ht_4} \leq r^1_{ht_4} + r^2_{ht_4} \leq t^{ht_3}_{ht_4} \cdot r_{ht_3} \leq t^{ht_2}_{ht_4} \cdot r_{ht_2} \leq t^{ht_1}_{ht_4} \cdot r_{ht_1}$$
$$ht_1 > ht_2 > ht_3 > ht_4$$

Vuelve a ser igual que las anteriores pero incorporando el menor plazo considerado (por ejemplo, 1 día).

b) Planteamiento de segundo nivel: ÁREAS y PRODUCTOS

Función objetivo B:

$$\text{coste sintético}_{ht_2} = r^1_{ht_2} + r^2_{ht_2}$$

Al igual que la función objetivo del primer nivel, ésta representa la equivalencia que debe existir entre el coste de la cobertura y el volumen de riesgo asumido con los recursos propios, pero para un plazo de ht_2. Esto significa que en intervalos temporales inferiores también debe cumplirse el objetivo final.

Restricción nº 1.B:

$$r^1_{ht_2} \leq r^{11}_{ht_2} + r^{12}_{ht_2}$$
$$r^2_{ht_2} \leq r^{21}_{ht_2} + r^{22}_{ht_2}$$

Esta primera restricción recoge, al igual que las anteriores, el efecto diversificación pero para un menor plazo, y además, por áreas, o por productos.

Restricción nº 2.B:

$$r^1_{ht_3} \leq r^{11}_{ht_3} + r^{12}_{ht_3} \leq t^{ht_2}_{ht_3} \cdot r^1_{ht_2}$$
$$r^2_{ht_3} \leq r^{21}_{ht_3} + r^{22}_{ht_3} \leq t^{ht_2}_{ht_3} \cdot r^2_{ht_2}$$

En su primera parte es igual que la anterior aunque para un plazo menor, mientras que en la segunda recoge el efecto conjunto para el plazo superior, es decir, que no se supere el límite de plazo superior equivalente o transformado.

Restricción nº 3.B:

$$r^{1}_{ht_4} \leq r^{11}_{ht_4} + r^{12}_{ht_4} \leq t^{ht_3}_{ht_4} \cdot r^{1}_{ht_3} \leq t^{ht_2}_{ht_4} \cdot r^{1}_{ht_2}$$
$$r^{2}_{ht_4} \leq r^{21}_{ht_4} + r^{22}_{ht_4} \leq t^{ht_3}_{ht_4} \cdot r^{2}_{ht_3} \leq t^{ht_2}_{ht_4} \cdot r^{2}_{ht_2}$$

Es igual a la anterior, pero incorporando el menor plazo.

c) Planteamiento de tercer nivel: OPERADORES y CONTRAPARTIDAS

Función objetivo C:

$$\text{coste sintético}_{ht_3} = r^{11}_{ht_3} + r^{12}_{ht_3} + r^{21}_{ht_3} + r^{22}_{ht_3}$$

Es equivalente a las anteriores, pero sobre un plazo menor.

Restricción nº 1.C:

$$r^{11}_{ht_3} \leq r^{111}_{ht_3} + r^{112}_{ht_3}$$
$$r^{12}_{ht_3} \leq r^{121}_{ht_3} + r^{122}_{ht_3}$$
$$r^{21}_{ht_3} \leq r^{211}_{ht_3} + r^{212}_{ht_3}$$
$$r^{22}_{ht_3} \leq r^{221}_{ht_3} + r^{222}_{ht_3}$$

Esta primera restricción reflejaría la diversificación para un intervalo temporal de ht_3.

Restricción nº 2.C:

$$r^{11}_{ht_4} \leq r^{111}_{ht_4} + r^{112}_{ht_4} \leq t^{ht_3}_{ht_4} \cdot r^{11}_{ht_3}$$
$$r^{12}_{ht_4} \leq r^{121}_{ht_4} + r^{122}_{ht_4} \leq t^{ht_3}_{ht_4} \cdot r^{12}_{ht_3}$$
$$r^{21}_{ht_4} \leq r^{211}_{ht_4} + r^{212}_{ht_4} \leq t^{ht_3}_{ht_4} \cdot r^{21}_{ht_3}$$
$$r^{22}_{ht_4} \leq r^{221}_{ht_4} + r^{222}_{ht_4} \leq t^{ht_3}_{ht_4} \cdot r^{22}_{ht_3}$$

En su primera parte es igual que la anterior, y en la segunda recoge el límite conjunto sobre el nivel temporal superior.

A medida que se ha ido planteado el sistema, se ha hecho mención de los dos conjuntos de factores de riesgo (externos e internos), y siempre al mismo nivel, así por ejemplo, se habla de operadores y contrapartidas. ¿Cuál es el significado de esto?

La respuesta es la reversibilidad o trasposición del sistema, esto es, si las restricciones se toman en un sentido, los límites harán referencia a la organización interna, mientras que si su lectura es en el otro, recogerá las limitaciones a los mercados, productos y contrapartidas.

Según se ha definido el problema, las restricciones vienen dadas por el lado de la organización interna, pero a través de un simple ejemplo demostraremos que fácilmente pueden transformarse en una matriz de límites para factores externos, es decir, pasaremos de límites para operadores a límites para mercados, productos o contrapartidas.

Supongamos una matriz de riesgos para una entidad que desarrolla una sola actividad a través de dos operadores, y que éstos a su vez operan en un solo mercado y en tres productos diferentes:

		Actividad A		
		Operador 1	**Operador 2**	
Mercado M	**Producto a**	r (1,a)	r (2,a)	**r (a)**
	Producto b	r (1,b)	r (2,b)	**r (b)**
	Producto c	r (1,c)	r (2,c)	**r (c)**
		r (1)	**r (2)**	

Donde r(·) representa el riesgo del producto o/y operador que aparezca entre paréntesis, como consecuencia de las operaciones realizadas por dichos operadores con los correspondientes productos.

Si expresamos matricialmente el sistema de restricciones resultará:

$$\begin{pmatrix} r_a \\ r_b \\ r_c \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} r_{1,a} & r_{2,a} \\ r_{1,b} & r_{2,b} \\ r_{1,c} & r_{2,c} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{factores externos}$$

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} r_{1,a} & r_{2,a} \\ r_{1,b} & r_{2,b} \\ r_{1,c} & r_{2,c} \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{factores internos}$$

Deben hacerse dos reflexiones, una vez demostrada la posibilidad de trasponer el sistema de restricciones. Por un lado, en relación al vector unidad, el cual contendrá tantos elementos como productos u operadores existan. Y por otro, sobre el signo de desigualdad del sistema de restricciones de los factores internos, esto es, si consideramos que existe correlación entre las decisiones de los operadores el signo es correcto, en cambio, si se supone, como ya se ha indicado en algún momento, que dichas decisiones son independientes, entonces el signo será de igualdad, puesto que la correlación será cero, y por tanto la suma de los riesgos individualmente considerados será igual al riesgo globalmente estimado.

3.4. Gestión de los límites

Por último, será preciso la gestión del límite o actualización del sistema, es decir, una vez que se han cubierto las etapas anteriores, esto es, se ha planteado y solucionado el problema de asignación de los recursos propios, deben considerarse una serie de posibles incidencias, como nuevos inputs, señales de alertas y rebasamiento de límites, así como el momento en que el sistema y las estimaciones deberán ser objeto de revisión. Además, respecto a los rebasamientos, no es válido considerar que un límite no ha sido rebasado si la posición no ha variado y sólo ha tenido lugar un aumento de la volatilidad.

La gestión de límites por tanto, abarcará dos áreas:

3.4.1. Control del sistema.

Hace referencia a la actualización y seguimiento del sistema, de forma que según sea la superficie de volatilidades del precio de la acción de la entidad, el valor a garantizar o precio de ejercicio y el horizonte temporal de cada límite, se fijarán los costes o límites a la operativa.

Esta actividad se divide en:

- Revisión del sistema:

El sistema se revisará, es decir, se volverá a calcular el coste de la estrategia simétrica de mercado y su reparto dentro del conjunto de restricciones, cuando haya transcurrido el horizonte temporal de cada estimación, se tratará pues, de una estimación progresiva a medida que vayan venciendo las estrategias de cobertura equivalentes, a semejanza de la técnica "roll-over".

- Seguimiento y control de los rebasamientos:

Para establecer el grado de rebasamiento, sería preciso establecer los diversos costes que resultarían para los diferentes valores garantizados (precios de ejercicio) y plazos, de manera que a medida que fuesen rebasándose costes, el valor asegurado sería menor.

De todo lo expuesto hasta el momento pueden extraerse una serie de cuestiones cuya resolución constituye en si misma la auténtica gestión del límite, con independencia de su determinación, acotada en apartados anteriores. De esta forma, distinguimos:

❖ Las restricciones vendrán en términos de igualdad (=) o desigualdad (≤).

❖ Qué relación deberá establecerse entre restricciones de orden superior e inferior, es decir, límites parciales con individuales y límites globales con parciales. Una posible respuesta formal sería:

$$\begin{gathered} r_i = \text{restricciones inferiores} \\ r_s = \text{restricciones superiores} \\ \sum r_i \subset r_s \\ r_s \in \left[r_s^{min} ; r_s^{max} \right] \end{gathered}$$

Donde el sumatorio de restricciones inferiores dependerá de las metodologías de estimación empleadas, y la restricción superior tendrá a su vez un intervalo de confianza, dependiente del método de cálculo aplicado. Esto último significa que las salidas del límites de su intervalo de confianza significaría:

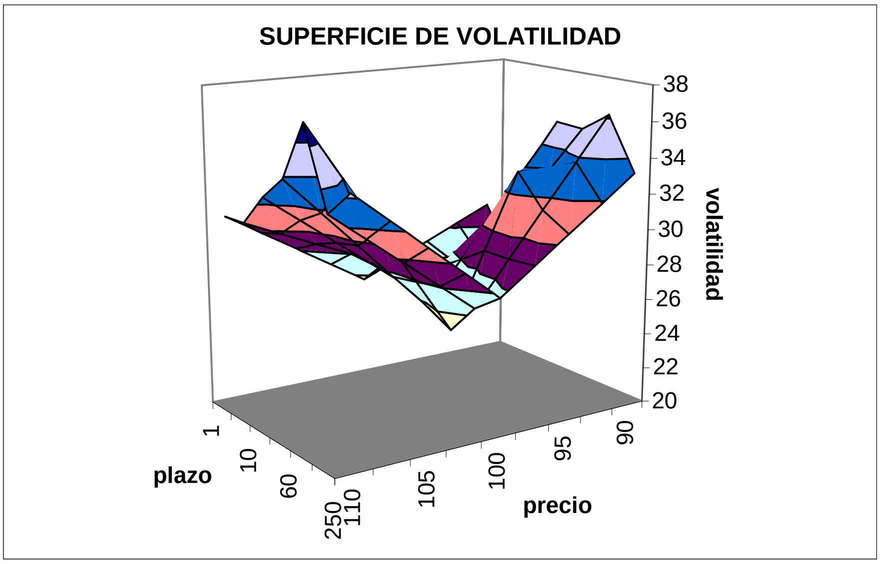
1. Si $r_s < r_s^{min}$, existirá un exceso de cobertura, de forma que tal ociosidad tendrá una incidencia negativa sobre la rentabilidad. Así pues, cualquier exceso provoca minoración de la rentabilidad.

2. Si $r_s > r_s^{max}$, será una señal de alerta, ya que se habrá producido un rebasamiento del límite, es decir, existirá un mayor riesgo que el inicialmente previsto.

Es ante estas dos situaciones, donde la entidad deberá tener preparado un plan de actuación, lógicamente diferenciando según la clase de límite excedido o deficitario, y en que casos puede existir cierta permisividad. La respuesta estará determinada por las relaciones que se planteen entre las metodologías de cálculo, niveles de confianza y horizontes temporales empleados.

Como los límites se han establecido con la intención de optimizar el uso de los recursos frente al coste de la cobertura externa del accionista, es evidente, que según sea el valor o la rentabilidad cubierta dicho coste variará, de manera que el resultado del sistema será diferente.

Pero el problema del rebasamiento, no es sólo cuestión del precio de ejercicio fijado, también influye la volatilidad, es decir, el coste de la cobertura no dependerá exclusivamente del valor asegurado, además intervendrá la volatilidad y el horizonte temporal. Esto nos conduciría a la estimación de la superficie de volatilidades, que gráficamente sería similar a:



En realidad la valoración y cobertura de opciones tiene un problema fundamental en el comportamiento de la volatilidad, pues ésta lejos de ser constante, se ve afectada por el factor tiempo y por el precio de ejercicio. El primero de los fenómenos se define como volatilidad estocástica, y el segundo como volatilidad smile, es decir, el primero está influido por el tiempo y el segundo por el precio del subyacente, o lo que es igual, uno genera la estructura temporal de la volatilidad y el otro la sonrisa o mueca de la volatilidad, y ambos la superficie de volatilidad. De esta manera la modelización estocástica completa será:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu\left(S_t, \sigma_t, t\right) \cdot dt + \sigma_t \cdot dW_t$$
$$\frac{d\sigma_t}{\sigma_t} = \alpha\left(S_t, \sigma_t, t\right) \cdot dt + \beta\left(S_t, \sigma_t, t\right) \cdot dZ_t$$
$$\left|\rho_{Z_t, W_t}\right| < 1$$

Al encontrarnos un problema con dos variables estocásticas, una forma de solventarlo es a través de la simulación de Monte Carlo. Esto exige el empleo de dos variables normales $\varepsilon_{1,i}$ y $\varepsilon_{2,i}$, siendo i el subperíodo dentro de los n totales en que se divide el plazo de vencimiento de la opción a valorar ($1 \leq i \leq n$). Así:

$$S_i = S_{i-1} \cdot e^{\left(r - \frac{1}{2} \cdot V_{i-1}\right)\Delta t + \sqrt{V_{i-1}\Delta t}\,\varepsilon_{1,i}}$$
$$V_i = V_{i-1} \cdot e^{\left(\mu_V - \frac{1}{2}\zeta^2\right)\Delta t + \rho\,\varepsilon_{1,i}\,\zeta\,\sqrt{\Delta t} + \sqrt{1-\rho^2}\cdot\varepsilon_{2,i}\,\zeta\cdot\sqrt{\Delta t}}$$

Donde V es la volatilidad estocástica, S el precio del subyacente, r la tasa de interés libre de riesgo, Δt es el valor del subintervalo temporal, ζ es la volatilidad de la volatilidad, ρ es la correlación entre la volatilidad y el precio del subyacente y μ_V es el valor medio al que revierte la volatilidad.

De esta manera, se podrían simular los precios mediante la técnica de la variable de antítesis, obteniéndose 4 precios para cada ε_1 y ε_2:

$$S_{1,i} \rightarrow f(\varepsilon_{1,i}, \varepsilon_{2,i})$$
$$S_{2,i} \rightarrow f(-\varepsilon_{1,i}, \varepsilon_{2,i})$$
$$S_{3,i} \rightarrow f(\varepsilon_{1,i}, -\varepsilon_{2,i})$$
$$S_{4,i} \rightarrow f(-\varepsilon_{1,i}, -\varepsilon_{2,i})$$

Y además, añadiendo otro control a través de los precios estimados según Black-Scholes:

$$S^*_{1,i} \rightarrow f(\varepsilon_{1,i}, v_i = v_0 = \text{cte.})$$
$$S^*_{2,i} \rightarrow f(-\varepsilon_{1,i}, v_i = v_0 = \text{cte.})$$

De manera que se obtienen finalmente:

$$y_{1,i} = (S_{1,i} + S_{3,i} - 2 \cdot S^*_{1,i})$$
$$y_{2,i} = (S_{2,i} + S_{4,i} - 2 \cdot S^*_{2,i})$$

Luego el precio final será el promedio de todas las simulaciones:

$$\text{precio} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{2}(y_{1,i} + y_{2,i})\right]$$

En resumen, la entidad tendrá estimados una cuantía de rebasamiento y un plazo de rebasamiento. El primero representará la cuantía máxima permitida, y el segundo el período máximo durante el cual se permitirá persista dicho rebasamiento.

Para determinar dichas cuantías máximas y dichos plazos deberá recurrirse al propio sistema, es decir, una vez estimados los horizontes temporales y niveles de confianza que deben emplearse en el sistema, sobre los valores simulados del precio de la acción de la entidad, se tomarán aquéllos que se correspondan con dicho nivel de confianza y horizonte temporal. Finalmente, se valorará la opción que debería adquirir el accionista para cubrir su riesgo, siendo el vencimiento de la misma los diversos horizontes temporales calculados anteriormente, y los precios de ejercicio los simulados para los diferentes niveles de confianza.

De esta manera, la idea es estimar, para diferentes precios de ejercicio, el valor de las opciones que constituyen la estrategia de cobertura equivalente a la de límites elegida, con lo que la superación de cada una de dichas primas representaría un rebasamiento, bien por ociosidad, o bien por señal de alerta, luego el sistema recoge ambos tipos de rebasamiento.

3.4.2. Remuneración.

El sistema de límites que aquí se propone aplica diferentes metodologías de estimación del riesgo según la estrategia seguida, esto es, “stop loss” o “hedged return”. En el primer caso, emplearemos la teoría de valores extremos, mientras que en el segundo, desarrollaremos técnicas de simulación de escenarios. A su vez, existe otra diferencia en lo relativo al valor en riesgo asumible en cada caso, puesto que las estrategias de cobertura simétricas de mercado son diferentes (opción simple frente a “spread”).

Todo ello significa que las matrices de restricciones serán diferentes, aunque en ambos casos podrán trasponerse, según se demostró.

Si denominamos R al riesgo estimado como “stop loss” y r al calculado como “hedged return”, entonces podrán expresarse las siguientes relaciones entre las correspondientes matrices de riesgo para un mismo horizonte temporal y nivel de confianza:

$$\begin{pmatrix} r_{1,a} & r_{2,a} \\ r_{1,b} & r_{2,b} \\ r_{1,c} & r_{2,c} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} R_{1,a} & R_{2,a} \\ R_{1,b} & R_{2,b} \\ R_{1,c} & R_{2,c} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} k_{1,a} & k_{2,a} \\ k_{1,b} & k_{2,b} \\ k_{1,c} & k_{2,c} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_{1,a} & r_{2,a} \\ r_{1,b} & r_{2,b} \\ r_{1,c} & r_{2,c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{1,a} & R_{2,a} \\ R_{1,b} & R_{2,b} \\ R_{1,c} & R_{2,c} \end{pmatrix}$$

La matriz k dará una imagen de la gestión desarrolla por la entidad, es decir, su cultura del riesgo, y podrá emplearse en el sistema de remuneración a empleados.

Según se ha definido la relación entre la matriz de riesgos “stop loss” y la “hedged return”, k representaría el intervalo de riesgo en el que debería moverse el operador. Si ahora definimos $F(\cdot)$ como la distribución acumulada empírica de dicha variable k, entonces para los niveles de riesgo “stop loss” deseado (R*) y hedged return (r*), resultará:

$$\frac{R_{ij}*}{r_{ij}*} = k* \Rightarrow F(k*) = 1$$

De esta manera, cualquier combinación diferente, supondrá que el operador ha asumido mayor riesgo “stop loss” (menor precio de ejercicio), o menor “hedged return”, y se expresará como:

$$\frac{R_{ij}}{r_{ij}} = k_{ij} \Rightarrow F(k_{ij}) = z_{ij} < 1$$

Si la entidad decide remunera a sus empleados siguiendo un sistema mixto (fijo más variable), entonces tomará para el operador i la variable z como factor “bonus” o “malus” sobre el salario fijo, siempre garantizando un mínimo, así:

$$s_{final} = \text{máx.}(s_i ; s_{mínimo})$$
$$s_i = (1 \pm z_i \cdot h) \cdot s_{fijo}$$

Donde s representa el salario y h será el número de veces que como máximo estará dispuesta la entidad a aumentar el salario fijo.

En cuanto al signo de z dependerá del valor de k, es decir, pueden darse dos posibilidades:

- Que k > k*, esto supone que el operador asume un mayor riesgo global o “stop loss” del permitido, o/y asume un menor riesgo de gestión o hedged return del asignado (excesivo conservadurismo). Por tanto, estará arriesgando mayor valor de la compañía, o/y gestionando menos riesgo del necesario para obtener la rentabilidad deseada. Todo ello supone que en esto caso el signo de z sea (-).

- Que k < k*, ello será debido a que el operador asume un menor (o igual) riesgo global o "stop loss" del permitido, o/y su riesgo de gestión o "hedged return" es mayor (o igual) del asignado. Por tanto, estará arriesgando menor valor de la compañía, y gestionando más riesgo con el fin de lograr una rentabilidad mayor a la deseada. Por ello el signo de z en este caso será (+).

El valor mínimo de k sería el resultante de una estrategia de cobertura realizada por el empleado para garantizar su salario, en función de las condiciones económicas del entorno (país). Con lo cual si S es el precio de las acciones de la entidad resultará:

$$\frac{\text{máx}(E_1 - S_t;0)}{\text{máx}(E_2 - S_t;0)} = k_{\text{mínimo}} \Rightarrow F(k_{\text{mínimo}}) = 0$$

Siendo la opción del numerador la que asegura el nivel de renta del empleado según la tasa de inflación acumulada para el período de remuneración (g), y la del denominador la que garantiza que su salario variable será al menos igual a la tasa libre de riesgo para el mismo período (r_f), entonces:

$$E_1 = S_0 \cdot (1 + g)$$
$$E_2 = S_0 \cdot (1 + r_f)$$

4. APLICACIÓN PRÁCTICA DEL SISTEMA

Para analizar la implementación del sistema de límites propuesto, consideramos una entidad cuya cartera al inicio de 1998 está compuesta por un título de Unión Fenosa (UNF) y otro de Iberdrola (IBER), todo lo cual asciende a 3.409 pesetas. Además consideramos que la empresa es Telefónica (TEF), y que la rentabilidad mínima buscada por la dirección en la cartera es del 10% anual.

A partir del primer día hábil del año 1998, esta entidad se plantea instaurar un sistema de límites como el aquí propuesto, de manera que los pasos que sigue son los siguientes:

4.1. *Estimación del coste de cobertura del actual valor de mercado de sus acciones.*

Esto se hará para los períodos trimestral, mensual, semanal y diario, tomando el valor actual de mercado de la acción, y valorando una opción ATM (At The Money) para dichos períodos, con una volatilidad estimada por ponderación exponencial de 0,94 (λ), y sobre una base histórica igual al año anterior, así la media de las variaciones del valor de la cartera será (R):

$$\frac{R_{t-1} + \lambda \cdot R_{t-2} + \ldots + \lambda^{n-1} \cdot R_{t-n}}{1 + \lambda + \ldots + \lambda^{n-1}} = \mu$$

Mientras que la volatilidad se obtendrá como sigue:

$$\sigma^2 = (1-\lambda) \cdot \sum_{t=n-k}^{n-1} \lambda^{n-k-1} \cdot (R_t - \mu)^2$$

La volatilidad anualizada obtenida fue del 30,1%.

Esta cobertura sería sobre el valor de Telefónica el primer día hábil de 1998, esto es, 4.340 pesetas, y mediante las estrategias de “stop loss” y “hedged return”. Por lo cual, antes de fijar las opciones a negociar, será preciso estimar el precio de ejercicio de las mismas. En el caso de “stop loss”, y como son opciones ATM, será el mismo precio que el de mercado, pero en el supuesto de “hedged return”, deberemos calcularlo en función de la rentabilidad a garantizar:

$$r_{trimestral} = (1 + r_{anual})^{\frac{1}{4}} - 1 = 2{,}41\% \rightarrow r_{trimestral}^{continua} = \ln(1 + 0{,}0241) \cong 2{,}38\%$$
$$r_{mensual} = (1 + 0{,}1)^{\frac{1}{12}} - 1 = 0{,}8\% \rightarrow r_{mensual}^{continua} = \ln(1 + 0{,}008) \cong 0{,}8\%$$
$$r_{semanal} = (1 + 0{,}1)^{\frac{1}{52}} - 1 = 0{,}18\% \rightarrow r_{semanal}^{continua} = \ln(1 + 0{,}0018) \cong 0{,}18\%$$
$$r_{diaria} = (1 + 0{,}1)^{\frac{1}{365}} - 1 = 0{,}03\% \rightarrow r_{diaria}^{continua} = \ln(1 + 0{,}0003) \cong 0{,}03\%$$

Una vez estimadas las tasas de rentabilidad a cubrir en la técnica de “hedged return”, los correspondientes precios de ejercicio serían:

$$E_{trimestral} = 4.340 \cdot e^{0{,}0238} \cong 4.445$$
$$E_{mensual} = 4.340 \cdot e^{0{,}008} \cong 4.375$$
$$E_{semanal} = 4.340 \cdot e^{0{,}0018} \cong 4.348$$
$$E_{diaria} = 4.340 \cdot e^{0{,}0003} \cong 4.341$$

Resumidamente las estrategias serían las siguientes para sus correspondientes plazos:

Estrategia	Trimestral	Mensual	Semanal	Diaria
Stop loss	+ Put (4.340)	+ Put (4.340)	+ Put (4.340)	+ Put (4.340)
Hedged return	- Call (4.445) + Put (4.340)	- Call (4.375) + Put (4.340)	- Call (4.348) + Put (4.340)	- Call (4.341) + Put (4.340)

Donde el signo (+) significa compra y el (-) venta, mientras que el valor que aparece entre paréntesis será el precio de ejercicio de la opción.

Aplicando Black y Scholes para la volatilidad estimada anteriormente se obtienen los siguientes precios para las diferentes estrategias el día 2 de enero de 1998:

Estrategia	Trimestral	Mensual	Semanal	Diaria
Tipo libre de riesgo	4,8%	4,84%	4,8%	4,76%
Stop loss	-312,79	-165,55	-78,61	-34,12
Hedged return	+230,88 -312,79	+137,7 -165,55	+71,91 -78,61	+33,07 -34,12

Por tanto, la estrategia de cobertura de la rentabilidad tendrá un coste neto de –81´91, -27´85, -6´7 y –1´05, para los períodos trimestral, mensual, semanal y diario, respectivamente.

4.2. *Simulación del comportamiento estocástico del precio de la acción de la empresa y de su volatilidad.*

Los resultados que se obtengan servirán tanto para el sistema de límites como para los rebasamientos. Para ello emplearemos el modelo de AVELLANEDA y ZHU (1996), puesto que no sólo es riesgo-neutro, sino que además considera que el precio y su volatilidad son estocásticos y están interrelacionados a través de un determinado nivel de correlación. Esto último, nos permitirá determinar el valor de las opciones según su precio de ejercicio. Para introducir el efecto de la correlación en el modelo recurriremos a la descomposición de Cholesky, de tal manera que en términos discretos (transformación de Euler) puede expresarse como (anexo-1):

$$\sigma_t = \sigma_{t-1} \cdot e^{(\alpha - \lambda \cdot \ln(\sigma_{t-1}))\Delta t + \left(V \cdot \sqrt{\Delta t}\varepsilon_i\right)}$$

$$S_t = S_{t-1} \cdot e^{\left(r - \frac{1}{2}\sigma_t^2\right)\Delta t + \left(\sigma_t \rho \cdot \sqrt{\Delta t}\varepsilon_i + \sqrt{1-\rho^2}\sigma_t \cdot \sqrt{\Delta t}\varepsilon_j\right)}$$

Donde r es la tasa libre de riesgo para cada uno de los plazos considerados (trimestral, mensual, semanal y diario), S es el precio de Telefónica y σ es su volatilidad. Para estimar el resto de parámetros ρ, λ, V y α, emplearemos el Método Eficiente de los Momentos, lo cual exige plantear un modelo de aproximación, en concreto emplearemos unos de los más usados en la práctica, el EGARCH, de esta forma:

$$\ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right)=r-\frac{1}{2}\cdot\sigma_t^2+\sigma_t\cdot\varepsilon_t$$
$$\ln\left(\sigma_t^2\right)=a_0+a_1\cdot\ln\left(\sigma_{t-1}^2\right)+a_2\cdot\left|\varepsilon_{t-1}\right|+a_3\cdot\left(\varepsilon_{t-1}\right)$$

Con lo que tras estimar los parámetros obtendremos siguiendo a RITCHKEN y TREVOR (1999), resulta:

$$\alpha=\frac{a_0}{2}+\frac{a_2}{\sqrt{2\cdot\pi}}$$
$$\lambda=1-a_1$$
$$V=\frac{|a_2|}{2}\cdot\sqrt{\left|\frac{a_3}{a_2}\right|+\frac{\pi-2}{\pi}}$$
$$\rho=\frac{\frac{a_3}{2}}{V}$$

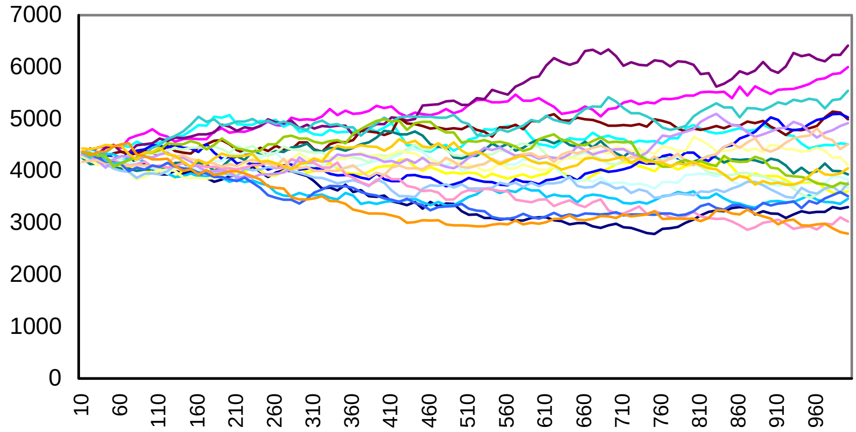
Una vez estimados los parámetros, para simular el comportamiento de la volatilidad y del precio, reemplazaremos las estimaciones en el modelo y recurriremos a la simulación de Monte Carlo, y en concreto la técnica de antítesis. De tal forma que, generaremos 500 números aleatorios (ε) y sus antitéticos (-ε) para cada recorrido, y simulamos 100 posibles recorridos. Los resultados fueron:

Parámetros	Estimación 95%	t-value	Modelo
a_0	0,03075	1,2726	
a_1	1,003231	357,4377	
a_2	0,00633	4,0986	
a_3	-0,006406	4,8574	
α			0,0179
λ			-0,003231
V			0,0037
ρ			-0,8629

De manera que el modelo sobre el que se simulará es el siguiente:

$$\sigma_t=\sigma_{t-1}\cdot e^{\left(0{,}0179+0{,}003231\cdot\ln\left(\sigma_{t-1}\right)\right)\Delta t+\left(0{,}0037\cdot\sqrt{\Delta t}\cdot\varepsilon_i\right)}$$
$$S_t=S_{t-1}\cdot e^{\left(0{,}048-0{,}05-\frac{1}{2}\sigma_t^2\right)\Delta t+\left(\sigma_t\cdot(-0{,}8629)\cdot\sqrt{\Delta t}\cdot\varepsilon_i+\sqrt{1-(-0{,}8629)^2}\cdot\sigma_t\cdot\sqrt{\Delta t}\cdot\varepsilon_j\right)}$$

Así, partiendo del precio de TEF el 2 de enero de 1998 (4.340) y su volatilidad (30,1%), gráficamente estos fueron los resultados de la simulación para un horizonte de 3 meses:



Finalmente, los valores promedio para cada uno de los horizontes temporales fueron:

Horizonte temporal	Valor promedio
Trimestral	4.494,21
Mensual	4.409,64
Semanal	4.391,27
Diario	4.327,43

4.3. *Determinación de los horizontes temporales de fijación de los límites*.

Para lo cual emplearemos el tiempo medio entre eventos extremos. Así, si se define β_i como:

$$\beta_i = \begin{cases} 1; x_i > u \\ 0; x_i \leq u \end{cases}$$

Siendo u el valor de las estrategias estimadas en el punto 1 para cada uno de los vencimientos y precios de ejercicio, y considerando que los β_i son independientes e idénticamente distribuidos siguiendo una Bernoulli, x serían cada uno de los cambios de valor del precio de Telefónica para los diferentes horizontes temporales, y sobre una base de 5 años (1993-1997), mediante la técnica de antítesis, esto es, cada resultado se multiplicará por -1. Entonces a partir β y la probabilidad correspondiente, los horizontes temporales serían:

$$HT = p^{-1}$$

Los resultados obtenidos para la estrategia de "stop loss" fueron:

Concepto	Trimestral	Mensual	Semanal	Diaria
Probabilidad evento	0,1127	0,1264	0,1235	0,1057
p	0,1130	0,1266	0,1238	0,1062
t	8,85	7,9	8,08	9,42
HT en días	549	158	40	9

Los resultados para la estrategia de hedged return fueron:

Concepto	Trimestral	Mensual	Semanal	Diaria
Probabilidad evento	0,3421	0,4164	0,4447	0,4592
p	0,3421	0,4166	0,4447	0,4596
t	2,92	2,4	2,25	2,18
HT en días	181	48	11	2

4.4. *Estimación de los niveles de confianza*.

Esto se llevará a cabo a través del índice extremo. Para estimarlo se dividirá la base histórica de 5 años del precio de la acción, en submuestras iguales al tamaño de cada horizonte temporal estimado en el apartado anterior (t), así tomando las submuestras que presenten excesos respecto del coste de la opción ATM (J), y siendo N el número de observaciones que exceden de dicho coste, el índice extremo para cada horizonte temporal lo estimaremos como:

$$\hat{\theta} = \frac{J}{N}$$

Se obtuvieron los siguientes resultados para la estrategia de "stop loss":

Concepto	549 días	158 días	40 días	9 días
t	9	8	8	9
J	45	67	108	125
N	263	305	302	259
θ	0,1711	0,2197	0,3576	0,4826

Mientras que para la estrategia de "hedged return" fueron:

Concepto	181 días	48 días	11 días	2 días
T	3	2	2	2
J	303	548	665	831
N	796	1004	1085	1124
θ	0,3807	0,5458	0,6129	0,7393

El nivel de confianza óptimo sería el resultante de elevar el nivel correspondiente al coste, por el producto del índice extremo y el horizonte temporal óptimo (t). Así pues, para diversos niveles de confianza k será:

$$k^{t \cdot \theta} \cong k^* \Rightarrow k = (k^*)^{\frac{1}{t \cdot \theta}}$$

Donde k* será el nivel de confianza del coste de la estrategia dentro del histograma del precio para cada horizonte temporal y k el nivel de confianza óptimo buscado. Así para nuestro ejemplo en el supuesto de "stop loss" será:

Concepto	549 días	158 días	40 días	9 días
$t \cdot \theta$	1,5142	1,7356	2,8894	4,5461

k*	0,9918	0,9306	0,913	0,9344
k	0,9946	0,9594	0,969	0,9852

Por su parte, para “hedged return” resulta:

Concepto	181 días	48 días	11 días	2 días
$t \cdot \theta$	1,1115	1,304	1,379	1,6117
k*	0,8385	0,7292	0,6263	0,5742
K	0,8534	0,7849	0,7123	0,7088

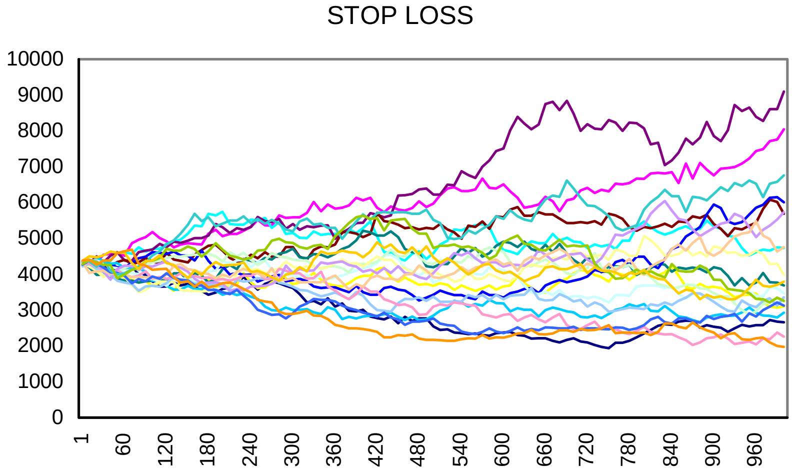
Como puede comprobarse dentro de los plazos destinados a la estrategia de “hedged return”, existe una relación directa entre el plazo y el nivel de confianza, es decir, a mayor plazo, mayor nivel; por el contrario, para los plazos correspondientes a la de “stop loss”, la relación es inversa (exceptuando el plazo mayor), lo cual nos indica que la dispersión de las variaciones del precio es menos estable al aumentar el período de medición, en el supuesto de garantizar un rendimiento, mientras que si se pretende asegurar un valor, ocurre lo contrario.

4.5. *Cálculo del coste de las estrategias simétricas para los horizontes temporales óptimos.*

Para los plazos estimados en el apartado 3, se calculará, sobre el comportamiento simulado de la acción, el precio de la estrategia simétrica, esto es, se supondrá que el vencimiento de las opciones es igual a los horizontes temporales estimados. Esta simulación se ha llevado a cabo mediante la técnica de antítesis, y además, se ha operado con una variable de control definida como la diferencia, para los distintos horizontes temporales, entre el valor de la correspondiente opción estimada mediante Black-Scholes y Monte Carlo, considerando que no existe dividendo y que la volatilidad es constante (30,1%).

Para la estrategia de “stop loss” los resultados fueron:

Concepto	549 días	158 días	40 días	9 días
Put (4.340)	1.382,10	663,98	312,06	130,06



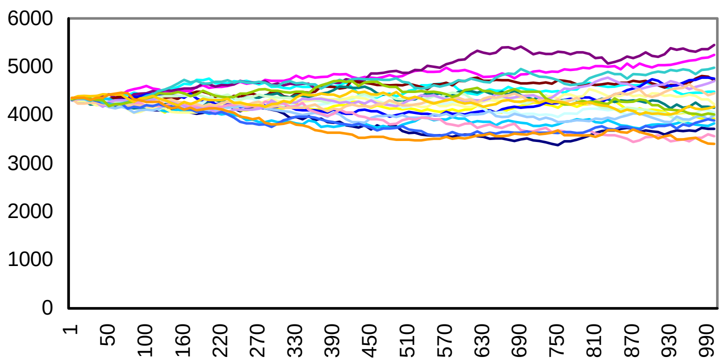
Respecto a la estrategia "hedged return" en primer lugar debe estimarse el precio de ejercicio de las opciones call según los horizontes temporales estimados en el apartado anterior:

$$E_{181} = 4.340 \cdot e^{0,047} \cong 4.549$$
$$E_{48} = 4.340 \cdot e^{0,0125} \cong 4.395$$
$$E_{11} = 4.340 \cdot e^{0,0029} \cong 4.353$$
$$E_{2} = 4.340 \cdot e^{0,005} \cong 4.342$$

Los resultados finalmente fueron:

Concepto	181 días	48 días	11 días	2 días
Call vendida	+345,33 (4.549)	+188,73 (4.395)	+88,05 (4.353)	+35,57 (4.342)
Put comprada	-570,24 (4.340)	-254,80 (4.340)	-116,28 (4.340)	-47,59 (4.340)
Coste total	224,91	66,07	28,23	12,02

HEDGED RETURN



4.6. *Estimación del VaR para los dos períodos más pequeños y sus correspondientes niveles de confianza*.

Sobre la cartera considerada (UNF e IBER), mediante la simulación histórica, puesto que la de Monte Carlo presenta el problema de la autosimilaridad como ya se comentó, se obtendrá el riesgo asumido en dichas posiciones para los horizontes temporales más pequeños determinados en el apartado 3, y sus correspondientes niveles de confianza estimados en el 4, sobre la base histórica 1993-1997.

Los resultados fueron:

Estrategia	Horizonte Temporal	Nivel de confianza	VaR IBER	VaR UNF	VaR suma	VaR cartera
Stop loss	9 días	98,52%	-115	-65	-180	-165,09
Stop loss	40 días	96,9%	-155	-90	-245	-233,66
Hedged return	2 días	70,88%	-10	-5	-15	-14
Hedged return	11 días	71,23%	-20	-11	-31	-27,02

Como puede comprobarse, al comparar el riesgo resultante de sumar el correspondiente a las dos posiciones con el de la cartera en su conjunto, la propiedad de subaditividad se cumple.

4.7. *Estimación del riesgo para los dos períodos temporales más altos y sus correspondientes niveles de confianza, respectivamente*.

Dentro de la base histórica de los precios de UNF e IBER, desde 1993 hasta 1997, construiremos los histogramas de las variaciones del precio de la cartera para los dos horizontes temporales más altos.

Posteriormente, para estimar el riesgo del segundo mayor horizonte temporal en cada estrategia, tomaremos k como la observación correspondiente al nivel de confianza determinado en el punto 4 para el segundo mayor horizonte temporal, de manera que:

$$H^* = \frac{1}{k} \cdot \sum_{i=1}^{k} \left[\ln(x_i) - \ln(x_{k+1})\right]$$
$$H^* = a + b \cdot x_i + e_i$$
$$\varepsilon = \frac{1}{a}$$
$$\forall i = 1,....., k$$

En este caso los resultados obtenidos a fecha de 2 de enero de 1998 fueron:

Estrategia	Horizonte temporal	Nivel de confianza	a UNF	a IBER	a cartera
Hedged return	48 días	78,49%	2,59	2,94	3,21
Stop loss	158 días	95,94%	2,94	3,61	3,89

Obtenido el valor de a, éste representará los grados de libertad de una distribución t-student con:

$$\mu = 0$$
$$\sigma^2 = \frac{a}{a-2}$$

A continuación, para adaptar esta distribución a la real se estimará:

$$\lambda = \frac{v}{\left(\frac{a}{a-2}\right)^{1/2}}$$

Donde v es la desviación estándar de la distribución real de las variaciones del valor de la cartera estimada mediante ponderación exponencial y para el horizonte temporal correspondiente. Así para nuestro caso resultó:

Estrategia	Horizonte temporal	Nivel de confianza	v UNF	V IBER	v cartera
Hedged return	48 días	78,49%	4,30%	6,60%	5,30%
Stop loss	158 días	95,94%	6,80%	7,60%	7,20%

Estrategia	Horizonte temporal	Nivel de confianza	λ UNF	λ IBER	λ cartera
Hedged return	48 días	78,49%	0,021	0,037	0,033
Stop loss	158 días	95,94%	0,038	0,051	0,050

A partir de este cociente entre la desviación de la muestra y de la distribución de student obtenida, el riesgo (R) sería:

$$R = V_0 \cdot \lambda \cdot t$$

Donde V_0 será el valor actual de la cartera y t representará el valor de la t-student según el índice de la cola y el nivel de confianza. Al respecto, se obtuvo:

Estrategia	Horizonte temporal	Nivel de confianza	R UNF	R IBER	R cartera
Hedged return	48 días	78,49%	-52,91	-131,71	-173,83
Stop loss	158 días	95,94%	-266,16	-346,09	-592,19

Sobre el histograma de variaciones del valor de la cartera para el mayor horizonte temporal tomaremos como k, en este caso, la variación que coincida con el nivel de confianza correspondiente a dicho período. Así a partir de esto, calcularemos el índice de la cola mediante del estimador de Hill:

$$\hat{\alpha} = \frac{1}{k-1}\sum_{i=1}^{k-1}\left[\ln(x_{i,t}) - \ln(x_{k,t})\right]$$

$$\hat{\varepsilon} = \frac{1}{\hat{\alpha}}$$

Los resultados de la estimación para dichos horizontes temporales fueron:

Estrategia	Horizonte temporal	Nivel de confianza	Hill UNF	Hill IBER	Hill cartera
Stop loss	549 días	99,46%	0,5582	0,4608	0,6579
Hedged return	181 días	85,34%	0,8182	0,3894	0,4345

Como podemos comprobar el índice de la cola no es constante, cuestión que ya se puso de manifiesto al estimarlo siguiendo la propuesta de KOEDIJK, HUISMAN y POWNALL (1998). Si a esto unimos que el cálculo para 549 días resulta poco significativo por la escasez de datos que reflejen pérdidas, esto nos lleva a emplear la estimación condicional del riesgo.

A continuación estimaremos el proceso GARCH (1,1) sobre la serie de variaciones del valor de la cartera de forma que:

$$\hat{x}_t = \varphi \cdot x_{t-1}$$
$$e_t = x_t - \hat{x}_t$$
$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot e_{t-1}^2 + \beta \cdot \sigma_{t-1}^2$$

Posteriormente, se genera la siguiente serie sobre los datos históricos:

$$z_t = \frac{x_t - \hat{x}_t}{\hat{\sigma}_t}$$

Una vez determinados los valores de z, se tomará, sobre el histograma resultante, el valor correspondiente al percentil que equivalga al nivel de confianza (p) del horizonte temporal según se determinó en el apartado 4. Entonces estimaremos z* como:

$$z^* = z_p + \frac{\beta}{\hat{\varepsilon}} \cdot \left[\left(\frac{1-p}{p} \right)^{-\hat{\varepsilon}} - 1 \right]$$

Y el “shortfall” condicional en un instante t sería:

$$S_t = \hat{x}_t + \hat{\sigma}_t \cdot z^* \cdot \left(\frac{1}{1-\hat{\varepsilon}} + \frac{\beta - \hat{\varepsilon} \cdot z_p}{(1-k) \cdot z^*} \right)$$

Los resultados obtenidos se muestran a continuación:

Parámetros	UNF (181 días)	UNF (549 días)	IBER (181 días)	IBER (549 días)	CARTERA (181 días)	CARTERA (549 días)
φ	0,998	1,002	0,996	1,001	0,998	1,002
α_0	-0,697	-0,475	-0,162	0,126	-1,273	-0,936
α_1	0,010	0,010	0,010	0,011	0,010	0,010
β	0,994	0,993	0,991	0,990	0,992	0,991
“shortfall”	-168,80	-500,68	-319,93	-683,95	-503,84	-1.360,22

Como puede comprobarse, nuevamente se cumple la propiedad de subaditividad para los diferentes horizontes temporales.

4.8. *Establecimiento del sistema de límites.*

Una vez estimados los riesgos a sus niveles correspondientes, según las metodologías, horizontes temporales y grados de confianza apropiados, describiremos el sistema de límites, esto es, las funciones objetivo y sus restricciones, teniendo en cuenta el coste de las oportunas coberturas simétricas de mercado.

✓ Estrategia “hedged return”:

HT	COSTE	CARTERA	UNF + IBER
2 días	12,02	≥ 14	$\leq (5+10)$
11 días	28,23	$\geq 27{,}02$	$\leq (11+20)$
48 días	66,07	$\geq 173{,}83$	$\leq (52{,}91+131{,}71)$
181 días	224,91	$\geq 503{,}84$	$\leq (168{,}80+319{,}93)$

✓ Estrategia “stop loss”:

HT	COSTE	CARTERA	UNF + IBER
9 días	130,06	$\geq 165{,}09$	$\leq (65+115)$
40 días	312,06	$\geq 233{,}66$	$\leq (90+155)$
158 días	663,98	$\geq 592{,}19$	$\leq (266{,}16+346{,}09)$
549 días	1.382,10	$\geq 1.360{,}22$	$\leq (500{,}68+683{,}95)$

El cumplimiento de las desigualdades supone que los axiomas fundamentales de las medidas de riesgo sean cumplidos, así:

* Las desigualdades entre el coste y la cartera indican que el sistema es libre de riesgo, que cumple la propiedad de traslación invariante y el axioma de la homogeneidad y positividad, puesto que si el valor de las acciones de la empresa es superior al valor de la cartera, su riesgo también deberá ser mayor. Ahora bien, si en el mercado resultase que el valor de la compañía fuese inferior al de su cartera, entonces, bien esta última estaría sobrevalorada respecto a la compañía, o bien la primera está infravalorada frente a la cartera, en cualquier caso, el sistema mostraría una oportunidad de arbitraje, que consistiría en vender la cartera y comprar acciones de la compañía
* Las desigualdades que aparecen entre la cartera y la suma de las posiciones individuales recogen las propiedades de subaditividad y homogeneidad y positividad.
* Las desigualdades que existen entre los riesgos de diferentes horizontes temporales, esto es, a mayor horizonte mayor riesgo, reflejan la propiedad de homogeneidad y positividad.

Finalmente, será preciso comprobar si el sistema de límites también se cumple trasponiéndolo, es decir, si las estimaciones para un horizonte temporal siguen siendo superiores que las de otro menor después de transformarlas temporalmente.

Para llevar a cabo dicha transformación temporal recurriremos a la regresión condicional de quantiles, esto es, a partir de los procesos GARCH (1,1) definidos en el apartado anterior, pero para todos los horizontes temporales. Tras estimar los quantiles correspondientes a cada horizonte y su correspondiente nivel de confianza, determinaremos las regresiones de quantiles, así pues para un nivel cualquiera (α) y horizonte temporal t, resultaría:

$$\hat{x}_t = a \cdot x_{t-1}$$
$$e_t = x_t - \hat{x}_t$$
$$\hat{\sigma}^2_{t+1} = b_0 + b_1 \cdot e^2_{t-1} + b_2 \cdot \sigma^2_t$$
$$q^\alpha_t = k_1 \cdot x_t + k_2 \cdot N^{-1}(\alpha)$$
$$\hat{q}^\alpha_t = \lambda_0 + \lambda_1 \cdot t^{\frac{1}{2}} \cdot \hat{\sigma}_{t+1}$$

Los resultados fueron los siguientes, donde el dato en negrita es la estimación del riesgo que no debería superarse, es decir, las transformaciones no deberían sobrepasar dicha estimación; además, indicamos en cursiva aquellas situaciones donde no se cumple lo anterior:

UNF hedged return	2 días	11 días	48 días	181 días
2 días	**-5**	-5,06	-5,15	-5,32
11 días		**-11**	-18,78	-22,14
48 días			**-52,91**	-60,21

UNF stop loss	9 días	40 días	158 días	549 días
9 días	**-65**	-66,41	-66,44	-66,48
40 días		**-90**	-90,17	-91,71
158 días			**-266,16**	-284,51

IBER hedged return	2 días	11 días	48 días	181 días
2 días	***-10***	*-9,72*	*-9,77*	*-9,85*
11 días		**-20**	-34,02	-40,60
48 días			***-131,71***	*-126,78*

IBER stop loss	9 días	40 días	158 días	549 días
9 días	***-115***	*-114,30*	-120,96	-132,54
40 días		**-155**	-156,34	-162,47
158 días			**-346,09**	-373,20

CARTERA hedged return	2 días	11 días	48 días	181 días
2 días	***-14***	*-12,74*	*-13,11*	*-13,77*
11 días		**-27,02**	-30,10	-33,76
48 días			***-173,03***	*-167,76*

CARTERA stop loss	9 días	40 días	158 días	549 días
9 días	***-165,09***	*-163,69*	-165,23	-166,16
40 días		**-233,66**	-234,78	-243,20
158 días			**-592,19**	-604,23

Como puede comprobarse, los incumplimientos son producidos por la posición en IBER (Iberdrola), de tal manera que mediante la regresión y trasposición de la matriz de límites, conseguimos detectar que componentes de la cartera son los que provocan que se asuma un riesgo mayor que el establecido siguiendo la estrategia correspondiente sobre las propias acciones.

Hemos de añadir que las estimaciones podrían realizarse también mediante otro sistema de regresión, buscando así un mejor ajuste a las colas de las distribuciones.

Una idea final que puede extraerse con relación a los incumplimientos, sería que la superficie de la volatilidad ("smile" y efecto tiempo) de las posiciones que componen la cartera, es la causa principal de los incumplimientos.

4.9. *Gestión del sistema de límites*.

En este apartado se pretende dar respuesta a la gestión activa de los límites, es decir, cómo deben estimarse y qué interpretación hay que dar a los rebasamientos. Para ello sobre los precios simulados de la acción de la compañía (TEF), en función de los niveles de confianza y horizontes temporales correspondientes, se estimará un proceso autorregresivo de orden 1, esto es:

$$x_{t,h} = k \cdot x_{t-1,h} + e_{t,h}$$

Donde x representa precios simulados en cada recorrido h, para un horizonte temporal de t días. Una vez determinado el error, se fijarán los niveles de confianza según establecen KLOEDEN y PLATEN (1999) para cualquier aproximación de Euler de un proceso estocástico, es decir, para uno cualquiera de los horizontes temporales y su correspondiente coste, según la estrategia ("stop loss" o "hedged return"), sería:

$$\text{coste} \pm t_{n-1,\alpha} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_e^2}{n}}$$

Donde n es el número de recorridos simulados, t es la distribución t-student con (n-1) grados de libertad y α de nivel de confianza, siendo σ_e^2 la varianza del error correspondiente al proceso autorregresivo. Además, respecto a α, la t-student se estimará no sólo para el nivel de confianza correspondiente al horizonte temporal en cuestión, sino también, para cada uno de los niveles superiores que correspondan a otros horizontes. De esta manera, en cualquier situación en la que el riesgo asumido por los operadores supere los resultados obtenidos informará sobre un rebasamiento; en concreto, si p representa un nivel de confianza de un horizonte temporal, entonces:

$$\text{riesgo} < \text{coste} - t_{n-1,p} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_e^2}{n}} \rightarrow \text{recursos ociosos}$$

$$\text{riesgo} > \text{coste} + t_{n-1,1-p} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_e^2}{n}} \rightarrow \text{señal de alerta}$$

Pues bien, aplicando todo esto al ejemplo que viene desarrollándose, obtuvimos los siguientes resultados añadiendo un último percentil del 99,9%:

- ✓ Estrategia "hedged return":

OCIO	2 días	11 días	48 días	181 días
Coste	*12,02*	*28,23*	*66,07*	*224,91*
Riesgo	*14*	*27,02*	*173,83*	*503,84*
0,7	13,05102886	29,3381151	68,158267	229,903649
0,7088	13,01931299	29,304028	68,0940291	229,750037
0,7123	13,00673794	29,2905127	68,0685593	229,689132
0,7849	12,75030894	29,0149115	67,5491827	228,447152
0,8534	12,51441968	28,7613856	67,0714078	227,304655
0,9594	12,15620885	28,3763927	66,3458802	225,569709
0,969	12,1239836	28,3417581	66,2806105	225,41363
0,9852	12,06963417	28,2833451	66,1705301	225,150396
0,9946	12,03810837	28,2494623	66,1066771	224,997705
0,999	12,02335436	28,2336052	66,076794	224,926246

ALERTA	2 días	11 días	48 días	181 días
Coste	*12,02*	*28,23*	*66,07*	*224,91*
Riesgo	*14*	*27,02*	*173,83*	*503,84*
0,3	14,79389944	31,2112938	71,688313	238,345006
0,2912	14,8449386	31,266149	71,7916887	238,592207
0,2877	14,86552397	31,2882734	71,8333827	238,69191
0,2151	15,3382057	31,7962958	72,790762	240,98128
0,1466	15,90617798	32,4067333	73,9411448	243,732176
0,0406	17,50443404	34,1244852	77,1782855	251,473113
0,031	17,79835249	34,4403788	77,7735939	252,896667
0,0148	18,55094526	35,2492402	79,2979108	256,541748
0,0054	19,47858506	36,2462363	81,1767715	261,034646
0,001	20,84850145	37,7185763	83,9514284	267,66965

- ✓ Estrategia "stop loss":

OCIO	158 días	40 días	9 días	549 días
Coste	*663,98*	*312,06*	*130,06*	*1382,1*
Riesgo	*592,19*	*233,66*	*165,09*	*1360,22*
0,7	665,69093	313,302631	130,833175	1383,60434
0,7088	665,638299	313,264406	132,17844	1383,55806
0,7123	665,617432	313,24925	130,799961	1383,53972

0,7849	665,191903	312,940193	130,607663	1383,16557
0,8534	664,800459	312,655891	130,430769	1382,82139
0,9594	664,20603	312,224163	130,162144	1382,29874
0,969	664,152554	312,185325	130,137978	1382,25172
0,9852	664,062365	312,119821	130,097221	1382,17242
0,9946	664,01005	312,081825	130,07358	1382,12642
0,999	663,985566	312,064043	130,062515	1382,10489

ALERTA	**158 días**	**40 días**	**9 días**	**549 días**
Coste	*663,98*	*312,06*	*130,06*	*1382,1*
Riesgo	*592,19*	*233,66*	*165,09*	*1360,22*
0,3	668,583118	315,403197	132,140165	1386,1473
0,2912	668,667814	315,464711	132,17844	1386,22177
0,2877	668,701974	315,489521	132,193877	1386,25181
0,2151	669,486361	316,059213	132,548344	1386,94148
0,1466	670,428876	316,743752	132,97427	1387,77019
0,0406	673,081085	318,670024	134,172813	1390,10215
0,031	673,568825	319,024265	134,393224	1390,53099
0,0148	674,817707	319,931315	134,957599	1391,62908
0,0054	676,357069	321,049338	135,653242	1392,98256
0,001	678,630362	322,700407	136,680551	1394,98136

Obtenidos estos resultados comprobamos que para la estrategia “hedged return” existe un problema de ociosidad de recursos en plazo de 11 de días, mientras que se han producido señales de alerta máximas para los horizontes temporales de 48 y 181 días, en cambio, el plazo 2 días no rebasa el percentil correspondiente a su período con lo que no genera señal de alerta. Por su parte, en la estrategia “stop loss”, se observa una ociosidad de recursos para todos los plazos exceptuando el 9 días, que presenta una clara y máxima señal de alerta.

4.10. *Remuneración de los operadores*.

La estimación de una remuneración variable, en función del riesgo, exige la comparación entre el riesgo asumido en la estrategia de “hedged return” y de “stop loss”. El problema es que existen diversas estimaciones para diferentes horizontes temporales y siguiendo distintas técnicas. Para homogeneizar este conglomerado será preciso realizar previamente dos transformaciones:

∗ Seleccionando previamente un período de tiempo, que bien pudiera ser el mes por ser este el plazo que media entre cada remuneración salarial en nuestro país, transformaremos las estimaciones del riesgo de su horizonte temporal a este otro mediante una regresión de quantiles, tal y como se efectúo en el apartado octavo. A su vez, se calculará el coste de las estrategias simétricas para ese mismo período.

Como resultado de la transformación temporal en el ejemplo resultó:

Horizonte temporal	UNF	IBER
2 días	-8,07	-23.87
9 días	-95,74	-130,97
11 días	-12,35	-33,33
40 días	-85,51	-134,33
48 días	-52,02	-101,13
158 días	-80,50	-189,45
181 días	-59,70	-179,99
549 días	-81,57	-196,63

En cuanto al coste de las estrategias, primero fue preciso determinar el precio de ejercicio para el caso de "hedged return", que garantice una rentabilidad del 10% anual, así pues se obtuvo:

Estrategia	Precio de ejercicio	Opción	Coste
Stop loss	4.340	PUT comprada	-207,65
Hedged return	4.340	PUT comprada	-207,65
Hedged return	4.375	CALL vendida	+167,38

Con lo cual el cociente entre ambos costes sería:

$$k^* = \frac{207,65}{207,65 - 167,38} = 5,1564$$

* Una vez que todas las estimaciones se han modificado en el plano temporal, se debe determinar el riesgo medio asumido en cada posición y por cada operador tanto en las estrategias de "hedged return" como de "stop loss". Esto presenta el inconveniente de que las estimaciones se efectuaron sobre diferentes niveles de confianza, por lo que será necesaria desarrollar una nueva regresión de quantiles para transformar todas las estimaciones a un mismo nivel de confianza. Dicho nivel deberá estimarse al igual que se hizo con los otros, es decir, sobre la serie histórica de variaciones mensuales de la acción con relación al coste de la estrategia simétrica de "hedged return", puesto que así introduciremos el factor de rentabilidad en la remuneración. A continuación determinaremos cual es el grado de certeza según el correspondiente índice extremo. El resultado obtenido fue:

Concepto	30 días
J	10
N	64
θ	0,15625
t	6,5
$t \cdot \theta$	1,02563

k*	0,9468
k	0,9473

Según esto, los quantiles obtenidos para 30 días deberán transformarse a un nivel de confianza del 94,73%, y como consecuencia de ello se obtuvieron los siguientes resultados:

Horizonte temporal	UNF	IBER
2 días (hedged return)	-50,16	-92,89
9 días (stop loss)	-64,03	-112,46
11 días (hedged return)	-73,96	-127,58
40 días (stop loss)	-85,03	-131,60
48 días (hedged return)	-106,68	-136,24
158 días (stop loss)	-94,26	-145,46
181 días (hedged return)	-118,85	-152,18
549 días (stop loss)	-142,79	-175,89
Promedio stop loss	**-87,41**	**-127,22**
Promedio hedged return	**-96,53**	**-141,35**

Suponiendo que los resultados anteriores son los medios del período de remuneración, en lugar de los correspondientes a un día (2 de enero de 1998), determinaremos el salario de cada empleado según el sistema de límites correspondiente. Así tomando como salario fijo mensual 300.000 pesetas, uno mínimo de 200.000 pesetas, una inflación anual del 2,5%, y un número máximo de veces de acumulación de salario fijo de 2, con lo cual h tendrá valor de 1, estimaremos el salario mínimo; para lo cual en primer lugar, se determinarán los costes de las opciones que el empleado debería adquirir para cubrir su riesgo, siendo los precios de ejercicio de dichas opciones los siguientes:

$$(1+0{,}025)^{\frac{1}{12}} = 1{,}0021 \rightarrow g_{continua} = \ln(1{,}0021) = 0{,}21\%$$
$$E_1 = 4.309 \cdot e^{0{,}0021} = 4.318{,}06$$
$$(1+0{,}0484)^{\frac{1}{12}} = 1{,}0039 \rightarrow rf_{continua} = \ln(1{,}0039) = 0{,}39\%$$
$$E_2 = 4.309 \cdot e^{0{,}0039} = 4.325{,}84$$

Los costes de estas opciones se expresarán como:

$$put(E_1) = máx.[4.318{,}06 - S_t ; 0]$$
$$put(E_2) = máx.[4.325{,}84 - S_t ; 0]$$

De manera que:

$$\frac{máx.[4.318{,}06 - S_t ; 0]}{máx.[4.325{,}84 - S_t ; 0]} = \frac{240{,}72}{229{,}02} = 1{,}0511 = k_{mínimo}$$

A partir de los resultados anteriores, bastará con hallar el cociente entre los riesgos asumidos medios por “hedged return” y “stop loss”, y asignarles una probabilidad acumulada según dichos cocientes, y con relación al obtenido de las estrategias simétricas de mercado. En nuestro caso resultó:

$$
\begin{aligned}
&k^* = 5{,}1564 \Rightarrow F(k^*) = 1 \\
&k_{mínimo} = 1{,}0511 \Rightarrow F(k_{mínimo}) = 0 \\
&k_{UNF} = \frac{-96{,}53}{-87{,}41} = 1{,}1043 \Rightarrow F(k_{UNF}) = 0{,}333 \\
&k_{IBER} = \frac{-141{,}35}{-127{,}22} = 1{,}1111 \Rightarrow F(k_{UNF}) = 0{,}667
\end{aligned}
$$

Entonces los salarios de los operadores serían:

$$
\begin{aligned}
&s_{UNF} = \text{máx}.[200.000;\,300.000 \cdot (1 - 1 \cdot 0{,}333)] = 200.100 \\
&s_{IBER} = \text{máx}.[200.000;\,300.000 \cdot (1 - 1 \cdot 0{,}667)] = 200.000
\end{aligned}
$$

En ambos casos, como k es inferior a k* la probabilidad acumulada aparece restando.

5. SUMARIO Y CONCLUSIONES

Ante las perspectivas de la actividad financiera resulta cada vez más fundamental realizar una gestión activa de riesgos. En este trabajo no sólo se ha destacado este hecho, sino que además, se ha insertado dicha idea dentro de la toma de decisiones al más alto nivel de la organización. Ello ha supuesto el desarrollo de un control interno de la entidad, y dentro de éste, entre otros, la necesidad de fijar unos límites a las diversas actividades realizadas. Surge así una definición de límite como la *cobertura de gestión*, esto es, cubrir a la entidad en su totalidad frente a cada una de las decisiones relacionadas con su actividad. Esta cobertura se llevará a cabo para diferentes niveles, así aparecen los límites globales, parciales e individuales, tanto desde la perspectiva de la organización interna (“top-down”), como desde la óptica de los factores externos (“bottom-up”).

El sistema propuesto en este documento presenta una función objetivo y unas restricciones al problema de la gestión del riesgo.

En lo relativo a la función objetivo, se ha planteado bajo dos premisas básicas:

1. Se contemplan las dos vertientes del control del riesgo en la toma de decisiones, por un lado, garantizar un valor (“stop loss”), y por otro, asegurar una rentabilidad (“hedged return”).

2. La gestión del riesgo que realice la entidad no debe ser más costosa que la pudiera desarrollar el accionista en el mercado. Esto nos conduce ha plantear dicha función objetivo en términos de riesgo-neutro, o libre de oportunidades de arbitraje, lo cual significa que el riesgo asumido por la entidad no puede superar el coste que le ocasionaría al accionista realizar la cobertura en el mercado.

Por lo que respecta a las restricciones son varias las exigencias técnicas que se han tenido en cuenta:

- El sistema está planteado siguiendo las propiedades que definen las medidas de riesgo coherentes, de forma que los incumplimientos representan rebasamientos.
- Las técnicas seleccionadas para medir el riesgo están en consonancia con las propiedades anteriores (simulación histórica), y a su vez, se centran más en el análisis de la cola de la distribución para los períodos de observación mayores. En concreto, al observar que el índice de la cola no es constante, se lleva a cabo una estimación condicional del "shortfall".
- Los parámetros de horizonte temporal del sistema y nivel de confianza se fijan según las condiciones de riesgo de la entidad, y no aleatoriamente. Para ello se emplea el tiempo medio entre eventos extremos y el índice extremo, comprobándose que en el caso de la estrategia de "hedged return" la relación entre horizonte temporal y nivel de confianza fue directa, mientras que para la de "stop loss" resultó inversa, con la excepción del plazo mayor.
- El sistema se plantea para que pueda ser transformable en plazo, nivel de confianza y perspectiva (organización o mercado). Para lo cual, teniendo en cuenta, las diferentes metodologías empleadas, los diversos horizontes de estimación y la autosimilaridad de las distribuciones, se utiliza la regresión condicional de quantiles. Ello además permite identificar incumplimientos del sistema o rebasamientos.

Finalmente, una vez implementado inicialmente el sistema, comienza realmente la labor de gestión y control, la cual queda dividida en:

1. Revisión periódica del sistema, según los horizontes temporales. Dicha técnica la asimilamos a la cobertura "roll-over".
2. Definición de rebasamientos, en su doble vertiente, ociosidad de recursos y señales de alerta. En este sentido, proponemos la utilización del error de la medición condicional del riesgo,

junto con una distribución de cola gruesa (t-student). Además, se concluye que los rebasamientos son causados por la superficie de volatilidad de las posiciones que componen la cartera.

3. Remuneración del personal, según la cultura de riesgo de la entidad, la actividad desarrollada por el operador medida en términos de riesgo y las condiciones macroeconómicas del entorno. Ello exige una transformación temporal (al plazo de remuneración) y de nivel de confianza, que se realiza a través de la regresión condicional de quantiles.

6. BIBLIOGRAFÍA

- ANDERSSON, F. y URYASEV, S. (1999). *Credit risk optimation with condicional Value at Risk criterion. Center for Applied Optimization*. Research report 99-9. University of Florida.
- ARTZNER, P.; DELBAEN, F.; EBER, J. y HEATH, D. (1998). *Coherent measures of risk.* ETH. Zurich.
- AVELLANEDA, M. y ZHU, Y. (1996). *A risk-neutral stochastic volatility model.* New York. Courant Institute. New York University.
- BEST, P. (1998). *Implementing Value at Risk.* John Wiley and sons. Chichester (West Sussex).
- CHRISTOFFERSEN, P.; DIEBOLD, F. y SCHUERMAN, T. (1998). *Horizon problems and extreme events in financial risk management*. Working paper 98-16. Financial Institutions Centre of the Wharton School. University of Pennsylvania.
- CRUZ, M.; COLEMAN, R. y SALKIN, G. (1998). *Modeling and measuring operational risk*. "The Journal of Risk" vo. 1 nº1.
- DEWOODY, Y. GURURAJ, V. T. y MARTIN, C. (1999). *Assessing risk for rare events*. "Journal of applied statistics". Vol. 26, nº 6.
- DIEBOLD, F.; HICKMAN, A.; INOUE, A. y SCHUERMAN, T. (1997). *Converting 1-day volatility to h-day volatility: scaling by $\sqrt{h}$ is worse than you think*. Working paper 97-34. Financial Institutions Centre of the Wharton School. University of Pennsylvania.

- DIEBOLD, F.; SCHUERMAN, T. y STROUGHAIR, J. (1998). *Pitfalls and opportunities in the use of Extreme Value Theory in risk management*. Working paper 98-10. Financial Institutions Centre of the Wharton School. University of Pennsylvania.
- DOWD, K. (1998). *Beyond Value at Risk. The new science of risk management*. John Wiley and sons. Chichester (West Sussex).
- EMBRECHTS, P.; KLÜPPELBERG, C. y MIKOSCH, T. (1997). *Modelling extremal events for insurance and finance*. Ed. Springer. New York.
- EMBRECHTS, P.; McNEIL, A. y STRAUMANN, D. (1999). *Correlation and dependence in risk management: properties and pitfalls*. ETH. Zurich.
- ENGEL, J. y GIZYCKI, M. (1999). *Conservatism accuracy and efficiency: comparing Value-at-Risk models*. Working papers nº 2. Reserve Bank of Australia.
- ENGLE, R. y MANGANELLI, S. (1999). *CAViaR: Condicional Value at Risk by quantile regression*. Working paper 7341. National Bureau of Economic Research. Cambridge (Massachusetts).
- JORION, P. (1996). *Value at Risk: The new benchmark for controlling market risk.* Irwin Professional Publishing. Chicago.
- KLOEDEN, P. y PLATEN, E. (1999). *Numerical solution of stochastic differential equations*. Springer. New York.
- KOEDIJK, K.; HUISMAN, R. y POWNALL R. (1998). *VaR-x: fat tails in financial risk management*. "The Journal of Risk" vol. 1 nº1.
- MATTEN, C. (1996). *Managing Bank Capital: Capital Allocation and Performance Measurement*. John Wiley and sons. Chichester (West Sussex).
- McNEIL, A. y FREY, R. (1999). *Estimation of tail-related risk measures for heterocedastic financial time series: an extreme value approach*. ETH. Zurich.
- RITCHKEN, P. y TREVOR, R. (1999). *Pricing options under Generalized GARCH and stochastic volatility processes*. "The Journal of Finance". Vol. LIV, nº 1.

- SOKAL, A. D. (1999). *Monte Carlo methods in statistical mechanics: foundations and new algorithms*. New York University.
- TAYLOR, J. (1999). *A quantil regression approach to estimating the distribution of multiperiod returns*. "The Journal of Derivatives".
- WATSHAM, T. J. (1998). *Futures and options in risk management*. 2ª Ed. International Thomson Business Press. Londres.
- WILMOTT, P (1998). Derivatives. *The tehory and practice of financial engineering*. John Wiley and sons. Chichester (West Sussex).

ANEXO-1

El modelo de AVELLANEDA y ZHU (1996), en el que tanto el activo (S) como su volatilidad (σ) son estocáticos, es el siguiente:

$$dS_t = r \cdot S_t \cdot dt + \sigma_t \cdot S_t \cdot dW_{S,t}$$
$$d\sigma_t = -\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot V \cdot \sigma_t^2 \cdot dt + V \cdot \sigma_t \cdot dW_{\sigma,\,t}$$

Donde r es la tasa libre de riesgo, V la volatilidad de la volatilidad y ρ la correlación entre la volatilidad y el precio del activo.

Para poder simular el comportamiento de dichas variable a través de Monte Carlo es preciso expresar en forma discreta los procesos, para lo que recurrimos a la transformación de Euler, de manera que:

$$X_t = X_{t\text{-}1} \cdot e^{(a-b)\Delta t + c\Delta W}$$

Y para aplicar Monte Carlo bastará con tener en cuenta que:

$$\Delta W = \varepsilon \cdot \sqrt{\Delta t}$$
$$\varepsilon \equiv N(0,1)$$

Y por tanto, bastará con generar números aleatorios.

Pero cuando aparecen dos variables estocásticas, como es el caso, al mismo tiempo que se discretiza el proceso, debe introducirse la correlación entre ambas. Para ello, podemos emplear la denominada descomposición de Cholesky, según la cual la matriz de covarianzas (Σ) puede expresarse como:

$$\Sigma = A \cdot A^t$$
$$\begin{pmatrix} \sigma_{1,1} & \sigma_{1,2} \\ \sigma_{2,1} & \sigma_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ 0 & a_{2,2} \end{pmatrix}$$
$$A = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ \sigma_2 \cdot \rho_{1,2} & \sigma_2 \cdot \sqrt{1-\rho_{1,2}^2} \end{pmatrix}$$

Entonces, la generación de los números aleatorios sería:

$$\Delta W_1 = \varepsilon_1 \cdot \sqrt{\Delta t}$$
$$\Delta W_2 = \rho \cdot \varepsilon_1 \cdot \sqrt{\Delta t} + \sqrt{1\text{-}\rho^2} \cdot \varepsilon_2 \cdot \sqrt{\Delta t}$$

Finalmente, para lograr reducir el error de la simulación, una de las técnicas que pueden emplearse es la variable de antítesis. Consiste en usar ε como número aleatorio generado, y al mismo tiempo, su opuesto, es decir, (-ε). De esta forma, las observaciones que se emplearán serán:

$$g_t = \frac{1}{2} \cdot \left[g_t(\varepsilon) + g_t(-\varepsilon)\right]$$

Con lo que la varianza de la estimación disminuirá, quedando como sigue:

$$\text{Var.} = \frac{1}{4} \cdot \left\{\sigma^2(\varepsilon) + \sigma^2(-\varepsilon) + \frac{1}{2} \cdot \text{cov.}\left[\varepsilon ; (-\varepsilon)\right]\right\}$$

FUNDACIÓN DE LAS CAJAS DE AHORROS

PARA LA INVESTIGACIÓN ECONÓMICA Y SOCIAL

DOCUMENTOS DE TRABAJO

Últimos números publicados

138/1998	Función de ingresos y rendimiento de la educación en España 1990 Josep Oliver Alonso, José L. Raymond Bara, José-Luis Roig Sabaté y Albert Roca Parés (Universitat Autònoma de Barcelona)
139/1998	Un análisis alternativo para determinar la eficiencia de los mercados de futuros energéticos: el bienestar social Javier García-Verdugo
140/1998	Grupos estratégicos en el sector asegurador, 1991-1995: el impacto de la bancaseguros Mª José Pinillos Costa y Mª Luz Martín Peña
141/1998	Educación, niveles de ingreso y ahorro en la economía española Josep Oliver Alonso, José Luis Raymond Bara, José Luis Roig Sabaté y Albert Roca Parés
142//1998	Gestión de riesgo y eficiencia en los bancos y cajas de ahorros José M. Pastor
143/1998	Rentabilidad, estructura de mercado y eficiencia en el sector bancario español Joaquín Maudos
144/1998	The Nature and Causes of Intra-Industry Trade: Back to the Comparative Advantage Explanation? The Case of Spain Vicente Blanes y Carmela Martín
145/1998	Fundamentos teóricos del gobierno de empresas. Una aplicación a las empresas españolas (1991-96) Mónica Melle Hernández
146/1998	Informe final del proyecto de investigación: Un análisis empírico de las diferencias salariales por actividades económicas, por sexo y entre sector público y privado Jaume García, Pedro Jesús Hernández y Ángel López
147/1999	Convergencia en la productividad horaria sectorial de los países de la UE, EE.UU. y Japón José María Maté Rubio
148/1999	El impacto de la ampliación de la UE en la política de cohesión económica y social Ismael Sanz Labrador
149/1999	Realizing the gains from electronic payments: costs, pricing and payment choice David Humphrey, Moshe Kim y Bent Vale

150/1999 Efectos del comportamiento diferencial de las empresas industriales extranjeras sobre los niveles de producción y empleo españoles
Francisco J. Velázquez

151/1999 La inversión de los fondos de pensiones: comparación del caso español y la situación internacional
Joan Montllor i Serrats y Mª Antonia Tarrazón Rodón

152/1999 Capital público y productividad: un enfoque sectorial
Melchor Fernández y Clemente Polo

153/1999 Determinants of bilateral foreign direct investment flows in the OECD, with a closer look at the former communist countries
Carmela Martín y Francisco J. Velázquez

154/1999 Determinants of net trade flows in the OECD: new evidence with special emphasis on the case of the former communist members
Carmela Martín y Francisco J. Velázquez

155/1999 Estimación del tipo de cambio real de la peseta utilizando métodos de paneles cointegrados
Mariam Camarero y Cecilio Tamarit

156/1999 Un diagnóstico de los sistemas de gestión de la calidad en el sistema bancario español
Fco. Javier Lloréns Montes

157/1999 The relationship between capital and earnings in european banking
Santiago Carbó, Juan Coello y David Marques

158/1999 An economic approach to the decomposition of variation in banking profitability
E. Grifell-Tatjé y C.A.K. Lovell

159/2000 Participación privada en la construcción y explotación de carreteras de peaje
Ginés de Rus, Manuel Romero y Lourdes Trujillo

160/2000 Errores y posibles soluciones en la aplicación del *Value at Risk*
Mariano González Sánchez

161/2000 Tax neutrality on saving assets. The spahish case before and after the tax reform
Cristina Ruza y de Paz-Curbera

162/2000 Private rates of return to human capital in Spain: new evidence
F. Barceinas, J. Oliver-Alonso, J.L. Raymond y J.L. Roig-Sabaté

163/2000 El control interno del riesgo. Una propuesta de sistema de límites riesgo neutral
Mariano González Sánchez