

# Errores y posibles soluciones en la aplicación del “Value at Risk”

Mariano González Sánchez

Secretario del Club de Gestión de Riesgos de España  
Profesor del Departamento de Empresa de la Universidad San Pablo-CEU de Madrid.

Madrid, 7 de marzo de 2000

## ABSTRACT

*Este trabajo estudia los avances que han tenido lugar en los últimos años en las técnicas de análisis de riesgos, puesto que la liberalización en la gestión y medición de éstos, a través de la aplicación de modelos internos ha supuesto un nuevo campo de estudio en las finanzas, íntimamente relacionado con diversas ciencias (matemáticas, estadística, economía, etc.). El documento comienza justificando la necesidad de medir el riesgo para limitar el capital arriesgado y remunerarlo convenientemente, pero ante la diversidad de formas de medición, presenta y estudia las propiedades que deben cumplir las medidas de riesgo para ser catalogadas como coherentes; esto servirá como primer filtro para eliminar algunas técnicas. En el segundo apartado se analizan los puntos débiles de las diferentes técnicas que se emplean en el diseño de modelos internos: cabe citar entre otros la no-normalidad de la distribución, la heterocedasticidad, la volatilidad estocástica, la liquidez y la correlación. A continuación, como consecuencia de las debilidades de la metodología VaR se justifica el uso de análisis complementarios. Estos últimos se dividen en dos grandes grupos, la simulación de situaciones críticas (análisis de escenarios, sensibilidades y aproximaciones mecánicas), y la validación del modelo interno (“back testing” y test de pérdidas excedidas); para ambos se describen las diferentes propuestas existentes en el mercado. Además, dentro del apartado de validación se propone un método que combina el nivel de conservadurismo del método empleado y el ajuste-eficiencia. Finalmente, se dedica un apartado a los últimos avances que relacionan la condicionalidad y la teoría de eventos extremos en la medición de riesgos.*

## Índice del documento

APARTADO	PÁGINA
<b>1. Medición coherente del riesgo</b>	<b>3</b>
<b>2. Problemas en la medición de riesgos</b>	<b>11</b>
✓ Problemas respecto de la distribución de probabilidad	11
✓ Problemas de la homocedasticidad	15
✓ Problemas en cuanto a la liquidez	25
✓ Problemática de la correlación	27
✓ Problemas en cuanto a la valoración de las posiciones	30
✓ Problemas según la técnica empleada	31
<b>3. La necesidad de los análisis complementarios</b>	<b>38</b>
<i>3.1. Pruebas antes situaciones críticas futuras</i>	<i>38</i>
✓ Análisis de escenarios	38
✓ Análisis de sensibilidad	47
✓ Aproximaciones mecánicas	52
<i>3.2. Validación del modelo interno</i>	<i>67</i>
✓ “Back testing”	67
✓ Test de las pérdidas excedidas	72
<b>4. Últimos avances</b>	<b>79</b>
<b>5. Sumario y conclusiones</b>	<b>81</b>
<b>6. Bibliografía</b>	<b>83</b>

## 1. MEDICIÓN COHERENTE DEL RIESGO

El objetivo último de la medición del riesgo está relacionado con la política de límites de la entidad, siendo preciso estimar el riesgo asumido para conocer el consumo de recursos propios, puesto que dicho consumo debe ser remunerado, ya que el accionista es el propietario de dichos recursos. Esto conduce a la toma de decisiones en términos de rentabilidad y riesgo, el problema es como determinar el riesgo asumido.

Si entendemos el riesgo como una situación probable futura que conllevaría una pérdida para la empresa, sería necesario para su estimación, que se determinasen previamente otros factores, como la exposición y la distribución de probabilidad del evento que originaría la situación crítica.

En la actualidad existen numerosas formas de medir el riesgo, pero dentro de ellas destacan las que forman parte de la metodología VaR (Valor en Riesgo o "Value at Risk"). Una de las principales ventajas de esta familia de técnicas es que permite la medición del riesgo de forma común para todos los productos, expresándolo en unidades monetarias. Pero como suele ocurrir, no todo son ventajas, ya que también presentan problemas de fiabilidad.

En este trabajo se pretende analizar los puntos débiles de la metodología VaR y en que medida pueden solventarse o completarse para mejorar el grado de certeza de su estimación.

Para comenzar, y situándonos en el supuesto de una entidad que deba seleccionar una técnica de medición del riesgo, debemos preguntarnos por la conveniencia de emplear una técnica u otra. La respuesta a esta cuestión se encuentra en los axiomas que toda medida coherente del riesgo debe cumplir, y que por tanto, serán un primer filtro que debería aplicarse para conocer la validez de las técnicas aplicadas.

Si definimos  $r(\cdot)$  como una medida de riesgo, dichas propiedades, propuestas por ARTZNER, DELBAEN, EBER y HEATH (1998), son las siguientes:

- *Traslación invariante.*

Invirtiendo una cantidad  $p$  en el activo libre de riesgo, la medida de riesgo de la posición total, esto es, la cartera  $(x)$  más esa inversión  $p$ , deberá recoger una disminución igual a  $p$ :

$$r(x + p \cdot R^*) = r(x) - p$$

Donde  $R^*$  es la rentabilidad del activo libre de riesgo.

Esto supone que si el activo no es el libre de riesgo, sino el mismo de la posición inicial ( $x$ ), entonces:

$$\forall x = p \rightarrow r(x + p \cdot R_x) = 0$$

- *Subaditividad.*

Para cualquier medida coherente del riesgo se debe cumplir que:

$$r(x + y) \leq r(x) + r(y)$$

Esto garantiza la gestión descentralizada del riesgo, es decir, que operaciones independientes de filiales u operadores, por ejemplo, no repercutan negativamente sobre el riesgo global de la entidad.

La propiedad de subaditividad según está enunciada puede llevar a dos interpretaciones en función de la metodología de estimación que se siga.

Una primera interpretación sería que el riesgo de la cartera nunca supere la suma de los riesgos de las posiciones individuales. No cabe duda que esta es la interpretación básica, y la que es analizada en la mayoría de metodologías. Pero existe una segunda interpretación, consecuencia de la sustitución del riesgo de la cartera por una aproximación en función del riesgo de los elementos que la componen y de la correlación entre éstos. Así pues, podemos dividir esta propiedad en dos apartados, y unir un tercero como conclusión de los dos primeros y la necesidad de que se cumpla la propiedad de subaditividad:

- 1)  $r(\text{cartera}) \leq r(x_1) + r(x_2)$
- 2)  $r(\text{aproximación}) \leq r(x_1) + r(x_2)$
- 3)  $r(\text{cartera}) \leq r(\text{aproximación})$

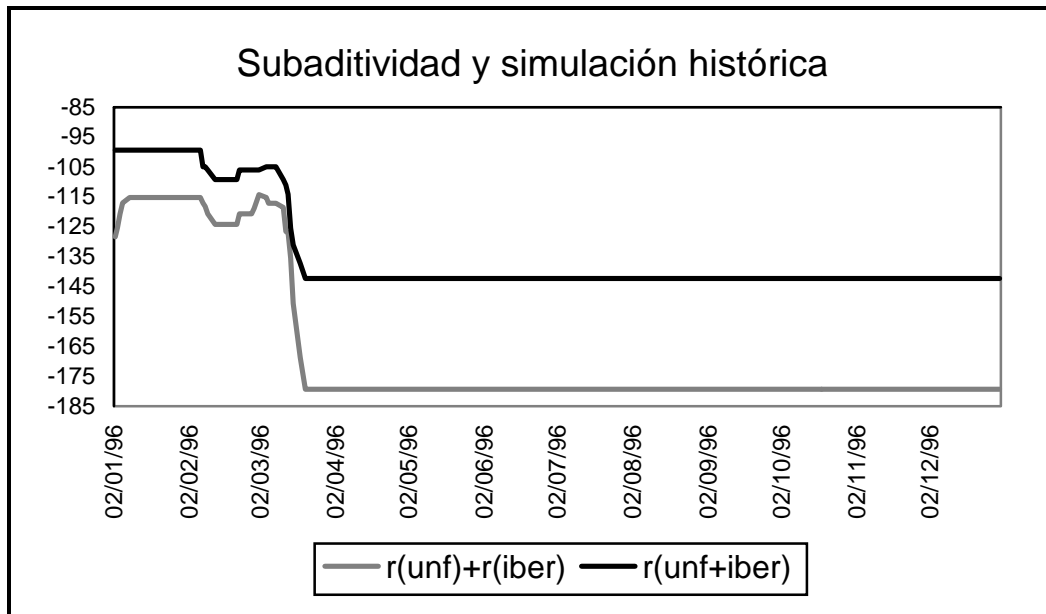
Dentro del análisis que estamos realizando para los métodos de estimación genéricos del VaR (simulación histórica, matriz de covarianzas y simulación de Monte Carlo), aparecen particularidades propias de cada uno que pasamos a comentar:

#### 1. Simulación histórica.

Como en este método no se realiza ninguna aproximación del comportamiento de la cartera, la propiedad de subaditividad en este caso se limita a la expresión:

$$1) r(\text{cartera}) \leq r(x_1) + r(x_2)$$

Así por ejemplo para una cartera compuesta por un título de Unión Fenosa y otro de Iberdrola durante 1996, los resultados de estimar el riesgo por simulación histórica con un nivel de confianza del 99%, un horizonte de 10 días y un período de observación de 1 año, son:



Como podemos comprobar, la simulación histórica cumple el apartado primero de esta propiedad.

## 2. Matriz de covarianzas.

En este caso, si se realiza una aproximación sobre el comportamiento de la cartera:

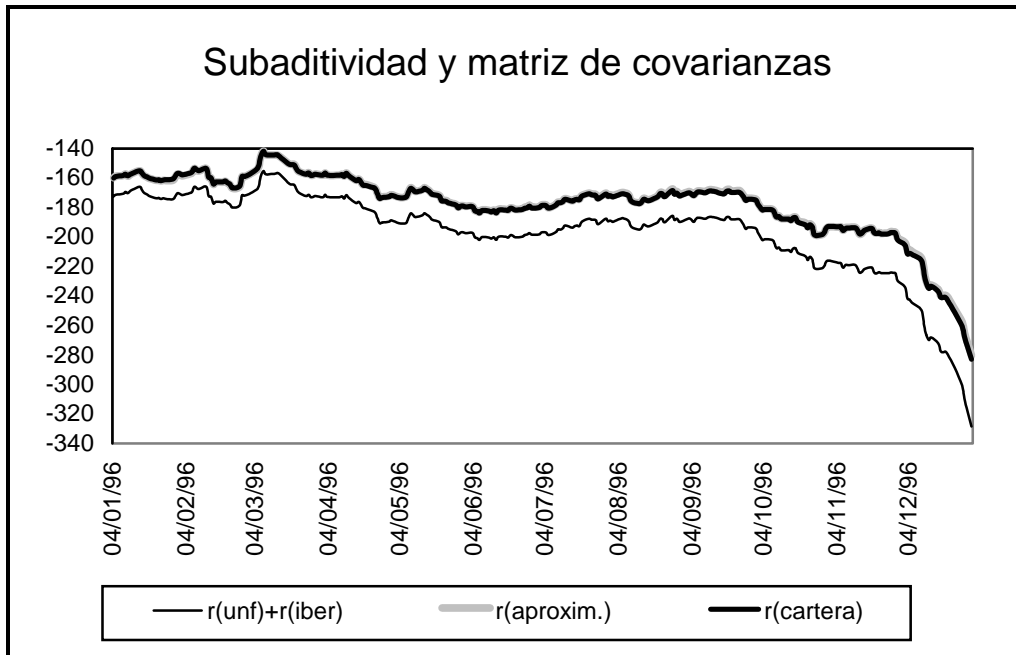
$$r(\text{cartera}) = \sigma_{\text{cartera}}$$

$$r(\text{aproximación}) = \left[ \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2 \cdot \rho_{1,2} \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

Entonces, el cumplimiento de la propiedad de subaditividad exigirá el estudio de los tres apartados:

- 1)  $r(\text{cartera}) \leq r(x_1) + r(x_2)$
- 2)  $r(\text{aproximación}) \leq r(x_1) + r(x_2)$
- 3)  $r(\text{cartera}) \leq r(\text{aproximación})$

Tomando el mismo ejemplo que en el caso de la simulación histórica resulta:



En este caso, sólo se cumplen los dos primeros apartados, ya que existen casos en los que el riesgo de la aproximación es inferior al de la cartera.

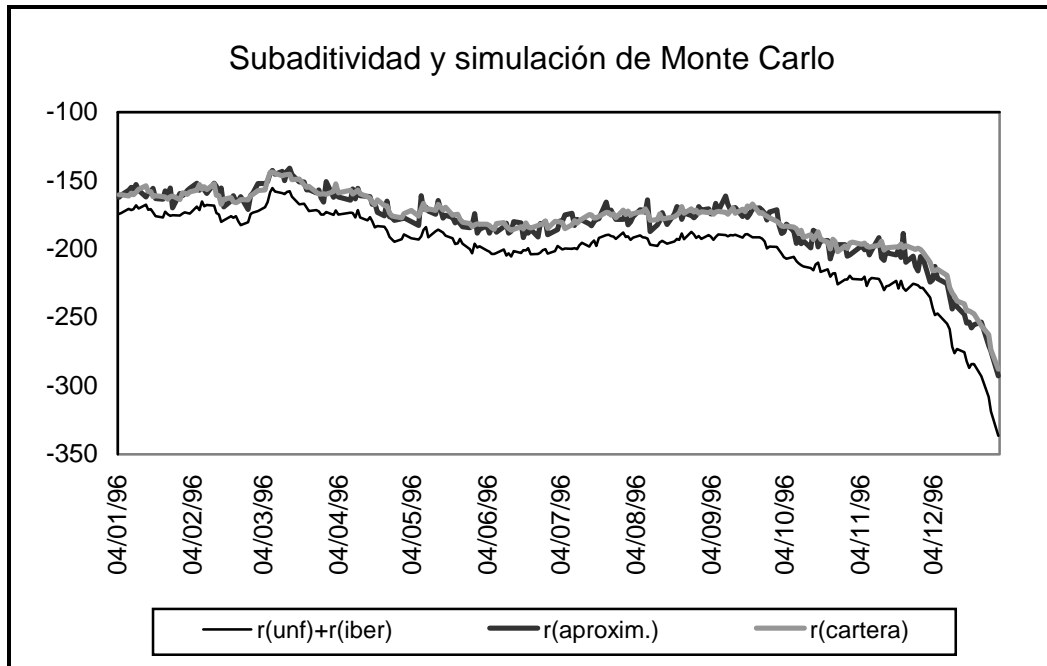
### 3. Simulación de Monte Carlo.

En esta técnica el comportamiento de la cartera suele reemplazarse por el de los denominados factores principales; esto supone que el riesgo de cada elemento de la cartera se presente como una combinación lineal de sus valores equivalentes (“eigenvalues”) y una suma de los efectos de los “eigenvalues” del resto de componente de la cartera. Así, si la descomposición de Cholesky para dos elementos es:

$$\begin{pmatrix} 1 & \rho_{1,2} \\ \rho_{1,2} & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} W_{1,t} = \varepsilon_{1,t} \cdot \sqrt{\Delta t} \\ W_{2,t} = \left[ \varepsilon_{1,t} \cdot \rho_{1,2} + \varepsilon_{2,t} \cdot \left(1 - \rho_{1,2}^2\right)^{\frac{1}{2}} \right] \cdot \sqrt{\Delta t} \end{cases}$$

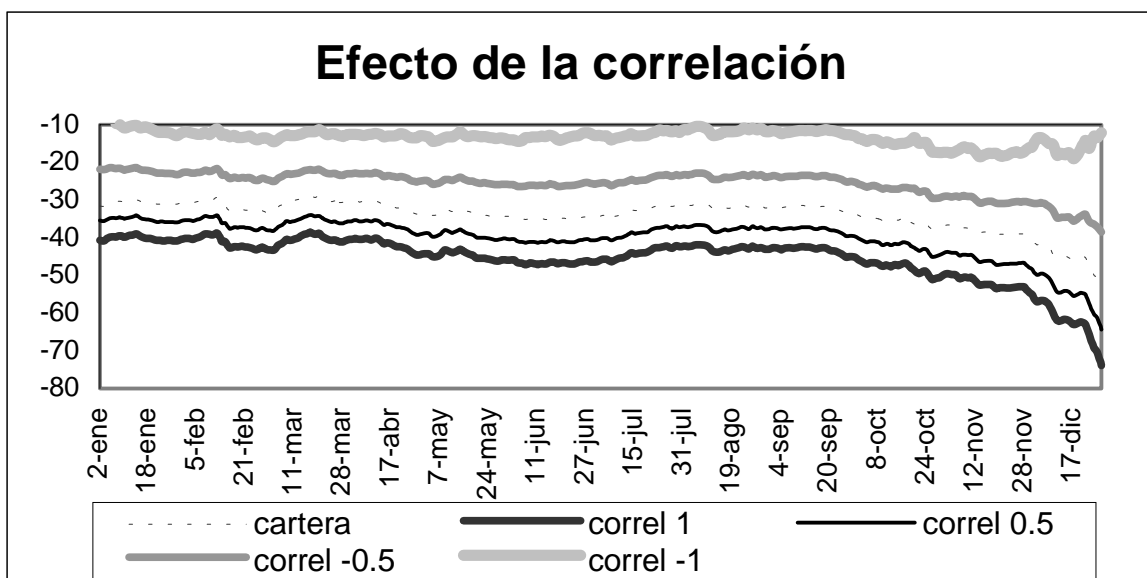
Esto exigiría que se cumpliesen los tres apartados de la propiedad de subaditividad.

Y para el mismo ejemplo que en los supuestos anteriores obtenemos:



Nuevamente sólo se cumplen los dos primeros apartados, al igual que en el caso de la matriz de covarianzas; el tercero de los componentes en que hemos dividido el axioma de la subaditividad, no se cumple regularmente.

En resumen, constatamos que en el cumplimiento de este axioma existe un problema, puesto que el riesgo estimado de forma independiente y agregado según la correlación, es inferior al riesgo estimado sobre la variación del precio de la cartera en su conjunto. La explicación de esto se encuentra en la diversificación, esto es, en la correlación entre activos. Para comprender mejor su efecto estimamos el riesgo con distintos grados de correlación para una cartera igual a la anterior pero sobre rendimientos diarios, y obtenemos:



De manera que correlaciones positivas sobrestiman el riesgo y negativas lo infraestiman, el problema es conocer el correcto grado de dependencia de los factores de riesgo.

- *Homogeneidad y positividad.*

La medida coherente del riesgo deberá cumplir que:

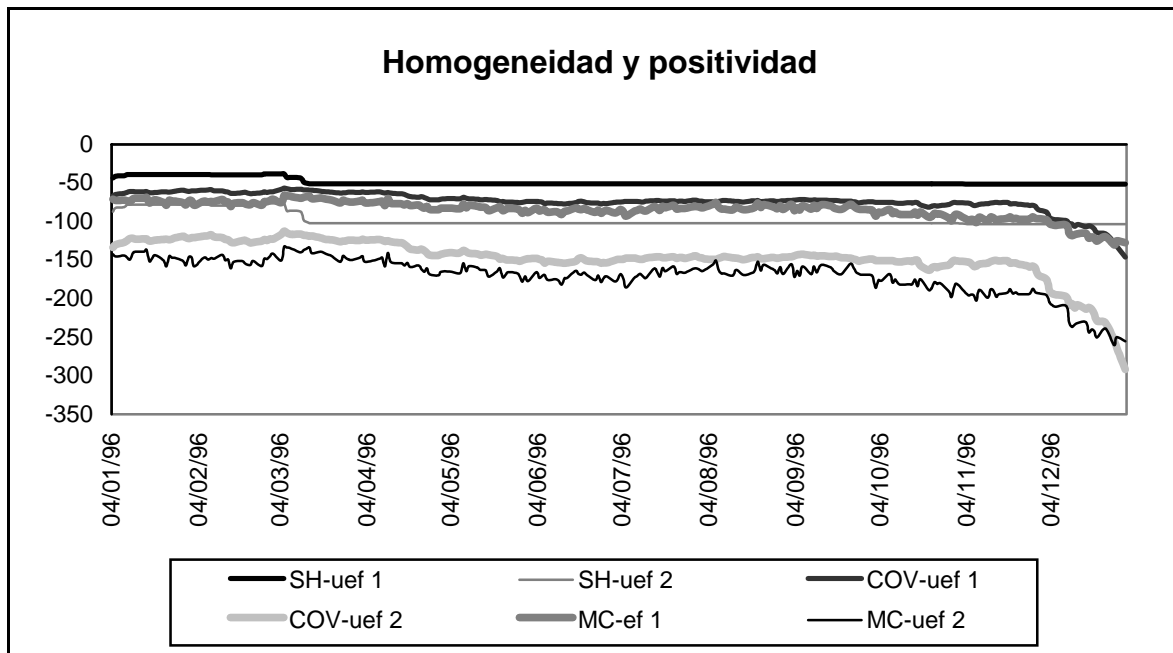
$$\forall t > 0 \rightarrow r(t \cdot x) = t \cdot r(x)$$

Es decir, si el tamaño de la posición influye en su valor futuro, esto es, en su liquidación, entonces habrá que considerar el riesgo de liquidez. Pero además, y al añadir el axioma de la subaditividad, resulta que:

$$r(x_{1,1} + x_{1,2} + \dots + x_{1,n}) = r(n \cdot x_1) \leq r(x_{1,1}) + r(x_{1,2}) + \dots + r(x_{1,n}) = n \cdot r(x_1)$$

Parece pues que ambos axiomas son opuestos, de manera que el cumplimiento de uno u otro dependerá del riesgo de liquidez y de la normativa aplicable.

Si volvemos a estudiar esta característica en las mismas condiciones que en el caso anterior, pero para una cartera con dos acciones de Unión Fenosa y otra con una sola, entonces el VaR de la primera deberá ser igual al doble del de la segunda:



Como se comprueba todos los métodos la cumplen.

- *Monotocidad.*

Que se representa como:



$$\text{Si } x \leq y \rightarrow r(x) \leq r(y)$$

Esto deja fuera medidas del tipo:

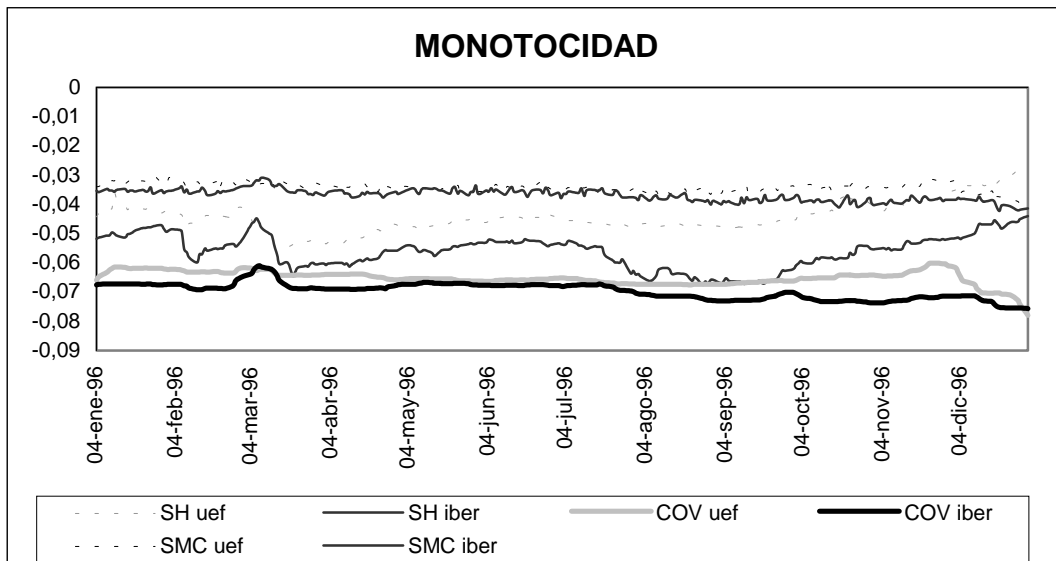
$$r(x) = -E_Q(x) + n \cdot \sigma_Q(x)$$

Siendo  $Q$  una probabilidad bajo la que se realizan las estimaciones y  $n > 0$ .

Aunque medidas del riesgo que empleen la semivarianza en lugar de la varianza cumplen este axioma, no cumplen la subaditividad, puesto que son de la forma:

$$r(x) = -E_Q(x) + \sigma_Q \left\{ \left[ x - E_Q(x) \right]^{\pm} \right\}$$

En este caso comparamos el VaR de una cartera con una acción de Unión Fenosa y el correspondiente a otra forma por un título de Iberdrola, pero para comprobarlo debemos expresar el VaR en forma relativa al precio de la cartera, esto es, dividir la estimación por el valor de cada cartera:



Como se comprueba ninguno de los métodos cumple este axioma, puesto que se fundamentan en medidas de dispersión de valores relativos o rentabilidades, cuyos importes son independientes del valor de la cartera.

En resumen, los métodos basados en percentiles presentan dos graves incumplimientos en lo relativo a la subaditividad y la monotocidad, lo cual se manifestaría en un problema de agregación de riesgos y de diversificación.

- *Relevancia.*

Este axioma evita la concentración de riesgos, esto es, la medida debe detectar este problema puesto que se enuncia como:

$$\text{Si } x \leq 0 \rightarrow r(x) > 0$$

De esta forma, a partir de un conjunto simulado o estimado de posibles valores futuros (B) y una medida del riesgo  $r(\cdot)$ , si dicha medida es coherente por cumplir los axiomas anteriores, el conjunto B resultante satisfará los requisitos de aceptabilidad.

## 2. PROBLEMAS EN LA MEDICIÓN DE RIESGOS

Una vez estudiadas las propiedades que deben cumplir las técnicas de medición de riesgos, analizamos los problemas concretos que presentan aquellas que pertenecen a la familia VaR, puesto que en los últimos años ha aumentado el empleo de modelos internos en la medición de riesgos, y la mayoría de éstos se sustentan en los principios de dicha metodología:

### ✓ *Problemas respecto de la distribución de probabilidad*

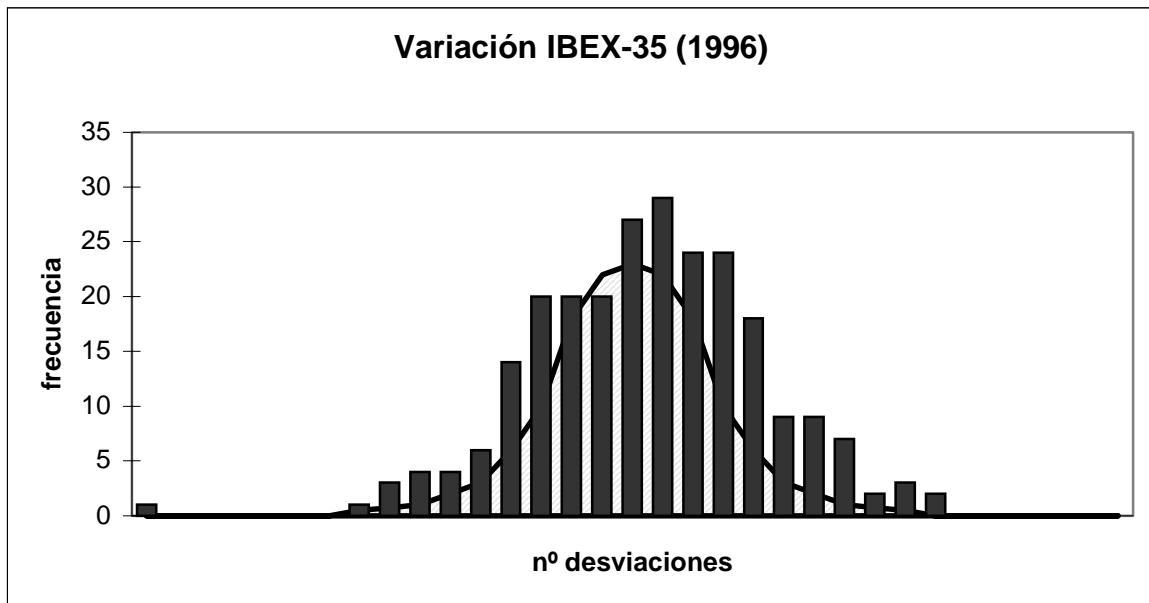
Es práctica habitual considerar que el comportamiento de la variación del precio de los factores de riesgo sigue una distribución normal, esto supone que la distribución será simétrica respecto de la media (asimetría igual a cero), y no presentará apuntamiento (curtosis igual a tres). Para analizar dicho comportamiento definimos la asimetría (A) como la medida del equilibrio de la distribución, y la curtosis (K) será la medida de la altura de la distribución. Así se estimarán como:

$$A = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3}{\sigma^3}$$

$$K = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^4}{\sigma^4}$$

De manera que si  $A > 0$  habrá una cola gruesa derecha, si  $A < 0$  la cola gruesa será la izquierda y si  $A = 0$  entonces la distribución será simétrica respecto de la media. Por su parte una curtosis superior a 3 se corresponderá con un apuntamiento, y si es inferior con un achatamiento (platicúrtica).

Por ejemplo si comparamos el comportamiento del IBEX-35 (barras) frente a una distribución normal resulta:



Donde los resultados estadísticos son:

concepto	resultado
media	0.00138127
varianza	0.00829862
asimetría	-1.08639665
Curtosis	6.88849568

Este problema de la hipótesis de la distribución se hace más latente en la medición del riesgo de productos derivados cuyo comportamiento no es lineal, es decir, opciones (V), donde para medir el riesgo de una opción los modelos delta llegan al desarrollo de primer orden de la serie de Taylor, es decir, expresan el comportamiento de la opción como una aproximación lineal del precio del subyacente (S), y por tanto:

$$dV = \Delta \cdot S \cdot \frac{dS}{S} \Rightarrow \text{normal}$$

mientras que los modelos delta-gamma llegan al de segundo orden, luego:

$$dV = \Delta \cdot S \cdot \frac{dS}{S} + \frac{1}{2} \cdot \Gamma \cdot S^2 \cdot \left( \frac{dS}{S} \right)^2 \Rightarrow \frac{dS}{S} (\text{normal}) + \left( \frac{dS}{S} \right)^2 (\text{normal}) = \chi^2 \text{Pearson}$$

De manera que una mayor aproximación en el comportamiento de los productos no lineales, supone un alejamiento de la distribución normal.

MATTEN (1996), con la intención de recoger el signo de la asimetría propone emplear en lugar de la desviación estándar, la semidesviación, es decir, estimar una desviación para los movimientos de dispersión superiores a la media y otra para aquellos que sean inferiores:

$$\sigma_{\text{alza}}^2 = \frac{1}{K-1} \cdot \sum_{t=1/P_t > \mu}^K \left[ \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) - \mu \right]^2$$

$$\sigma_{\text{baja}}^2 = \frac{1}{(N-K)-1} \cdot \sum_{t=1/P_t \leq \mu}^{N-K} \left[ \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) - \mu \right]^2$$

De esta forma, si la asimetría es negativa, significa que existe un mayor número de observaciones a la izquierda de la media que a la derecha, y parecería lógico pensar que la probabilidad de un determinado valor dependerá de a que lado de la media se encuentre.

Por tanto, cuando una entidad tenga una posición activa o larga, empleará la semidesviación de bajada, mientras que si posee una posición pasiva o corta empleará la de subida. Además ha de tenerse en cuenta que esta mecánica permite diferenciar entre riesgo de mercado y de crédito. Así por ejemplo, en una posición activa emplearemos la semidesviación de bajada para medir el riesgo de mercado, mientras que para evaluar el riesgo de crédito (que el mercado se mueva a nuestro favor y desfavorablemente para la contrapartida) utilizaremos la semidesviación de subida.

La solución que aporta la semidesviación no se limita a diferenciar entre riesgo de mercado y de crédito, sino que además al atender a una sola de las colas de la distribución, se corrige el hecho de tomar como hipótesis de partida una distribución normal.

Por su parte, la estimación de las semicovarianzas se llevará a cabo del siguiente modo:

$$\sigma_{+,+} = \sqrt{\frac{1}{m-1} \sum_{t=1}^m \left[ \ln\left(\frac{A_t}{A_{t-1}}\right) \cdot \ln\left(\frac{B_t}{B_{t-1}}\right) \right]} \Rightarrow \forall t = 1, \dots, m \rightarrow \ln\left(\frac{A_t}{A_{t-1}}\right) > 0 \text{ y } \ln\left(\frac{B_t}{B_{t-1}}\right) > 0$$

$$\sigma_{+,-} = \sqrt{\frac{1}{m-1} \sum_{t=1}^m \left[ \ln\left(\frac{A_t}{A_{t-1}}\right) \cdot \ln\left(\frac{B_t}{B_{t-1}}\right) \right]} \Rightarrow \forall t = 1, \dots, m \rightarrow \ln\left(\frac{A_t}{A_{t-1}}\right) > 0 \text{ y } \ln\left(\frac{B_t}{B_{t-1}}\right) < 0$$

$$\sigma_{-,-} = \sqrt{\frac{1}{m-1} \sum_{t=1}^m \left[ \ln\left(\frac{A_t}{A_{t-1}}\right) \cdot \ln\left(\frac{B_t}{B_{t-1}}\right) \right]} \Rightarrow \forall t = 1, \dots, m \rightarrow \ln\left(\frac{A_t}{A_{t-1}}\right) < 0 \text{ y } \ln\left(\frac{B_t}{B_{t-1}}\right) < 0$$

Pero esta operativa no resuelve el problema de que la media de la distribución no sea constante, es decir, su variación sea considerable; para estos supuestos MATTEN (1996) defiende el uso del error estándar, esto es, la diferencia entre los valores observados y los teóricos (obtenidos estadísticamente); así pues en lugar de emplear la desviación como volatilidad se empleará:

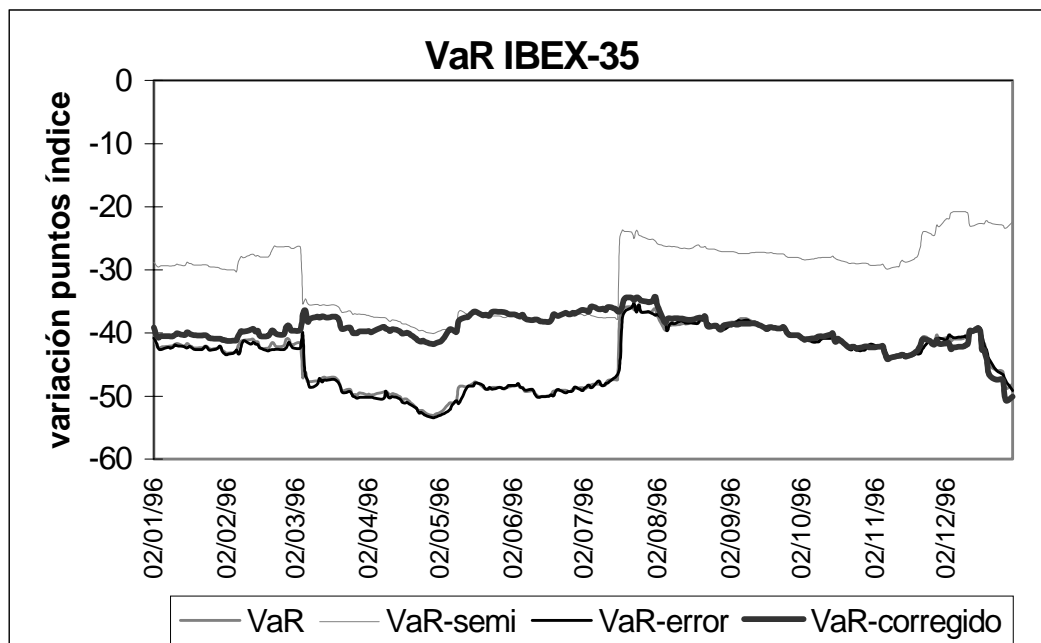
$$e = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^N X_t - \hat{X}_t}{N-2}}$$

Otra forma de solucionar los problemas de no-normalidad es incluir la asimetría y la curtosis en la volatilidad, así se define  $z$  como uno menos el nivel de confianza elegido, esto es, si  $\alpha$  es 1,65,  $z$  será 0,05; de esta manera el VaR será:

$$\text{VaR} = -(\alpha - v) \cdot \sigma \cdot V_{\text{MERCADO}}$$

$$v = \frac{1}{6} \cdot (z^2 - 1) \cdot A + \frac{1}{24} \cdot (z^3 - 3 \times z) \cdot K - \frac{1}{36} \cdot (2 \cdot z^3 - 5 \cdot z) \cdot A^2$$

Así por ejemplo, si estimamos el VaR con un nivel de confianza del 90% para una posición larga en el IBEX-35, un horizonte temporal de 1 días y una base de 90 datos, empleando las aproximaciones de MATTEN (1996) (VaR-semi y VaR-error), la corrección con la asimetría y la curtosis (VaR-correctado) y el método normalizado tradicional (VaR), el resultado gráficamente es:



Otra posibilidad empleada es la mezcla de normales. Una mezcla de n-gaussianas representa una distribución de probabilidad de un fenómeno que se puede comportar como n-normales cada una con su media y varianza, y con una probabilidad de ocurrencia determinada. Si fuesen 2 resultaría:

$$\begin{aligned} z &= q \cdot z_1 + (1-q) \cdot z_2 \\ z_1 &\rightarrow N(\mu_1; \sigma_1^2) \\ z_2 &\rightarrow N(\mu_2; \sigma_2^2) \end{aligned}$$

Donde q seguirá una distribución de Bernoulli (p), y podrá tomar los valores 1 con probabilidad p, o 0 con probabilidad (1-p).

Con lo que los primeros momentos de z serán:

$$\begin{aligned} \mu &= p \cdot \mu_1 + (1-p) \cdot \mu_2 \\ \sigma^2 &= p^2 \cdot \sigma_1^2 + (1-p)^2 \cdot \sigma_2^2 + p \cdot (1-p) \cdot (\mu_1 - \mu_2)^2 \end{aligned}$$

Para su estimación es preciso conocer la media, la varianza y la probabilidad de cada una de las normales que la componen.

#### ✓ *Problema de la homocedasticidad*

Considerar la distribución como normal trae consigo otro inconveniente añadido, en concreto, que la volatilidad es constante, y que por tanto, para distintos horizontes temporales la varianza será proporcional al plazo. Esto representa la famosa regla de la raíz cuadrada, es decir, si pretendemos estimar el riesgo a 5 días, es indiferente tomar diferencias a 1 día y transformarlas en 5 días, que tomar directamente diferencias de valor cada 5 días. De esta manera, la homocedasticidad supone varios problemas:

##### 1. Autosimilaridad.

Es la propiedad por la que unos valores de un proceso estocástico se transforman en otro para un período o intervalo temporal diferente, esto es:

$$(x_{1,T}; x_{2,T}; \dots; x_{t,T}) = T^k \cdot (x_{1,1}; x_{2,1}; \dots; x_{t,1})$$

A efectos de la distribución se expresaría como:

$$x_{S,T} \stackrel{\text{distrib}}{\Rightarrow} T^k x_{S,1}$$

Al aplicar esta propiedad debe tenerse en cuenta que:

$$k = \frac{1}{\alpha}$$

siendo  $\alpha$  la estabilidad de la distribución, es decir, el número de momentos distintos de cero, o explicativos del comportamiento de la variable.

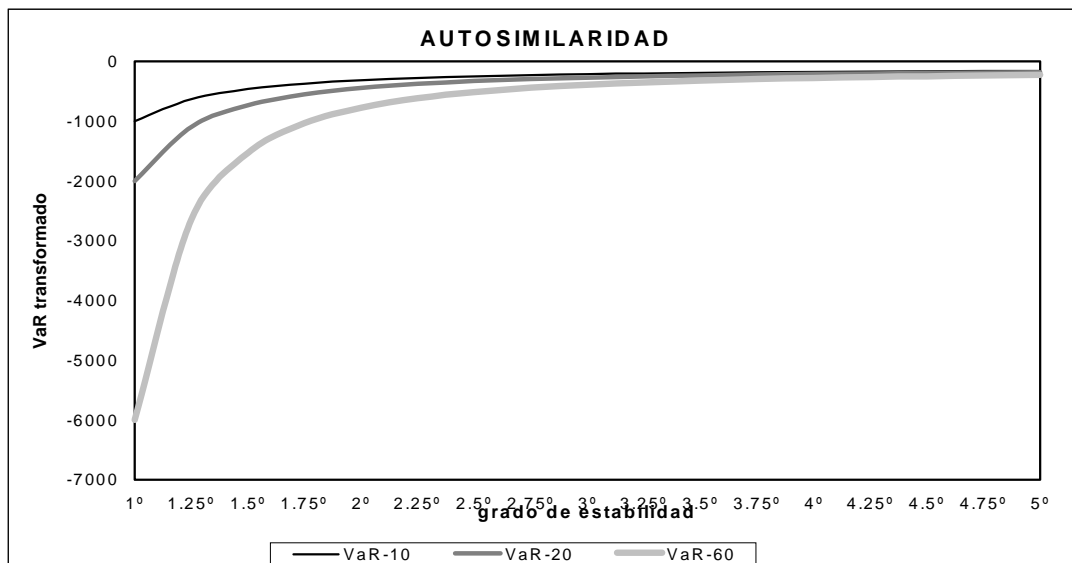
Así por ejemplo, un Browniano que sigue una normal cuyo  $\alpha=2$ , cumple la famosa regla de la raíz cuadrada del tiempo:

$$B_{S,T} = \sqrt{T} \cdot B_{S,1}$$

Pero cuando  $\alpha < 2$ , lo que representa un proceso de saltos, dicha regla no es aplicable de la misma forma:

$$X_{S,T} \xrightarrow{\text{distrib}} T^{1/\alpha} X_{S,1}$$

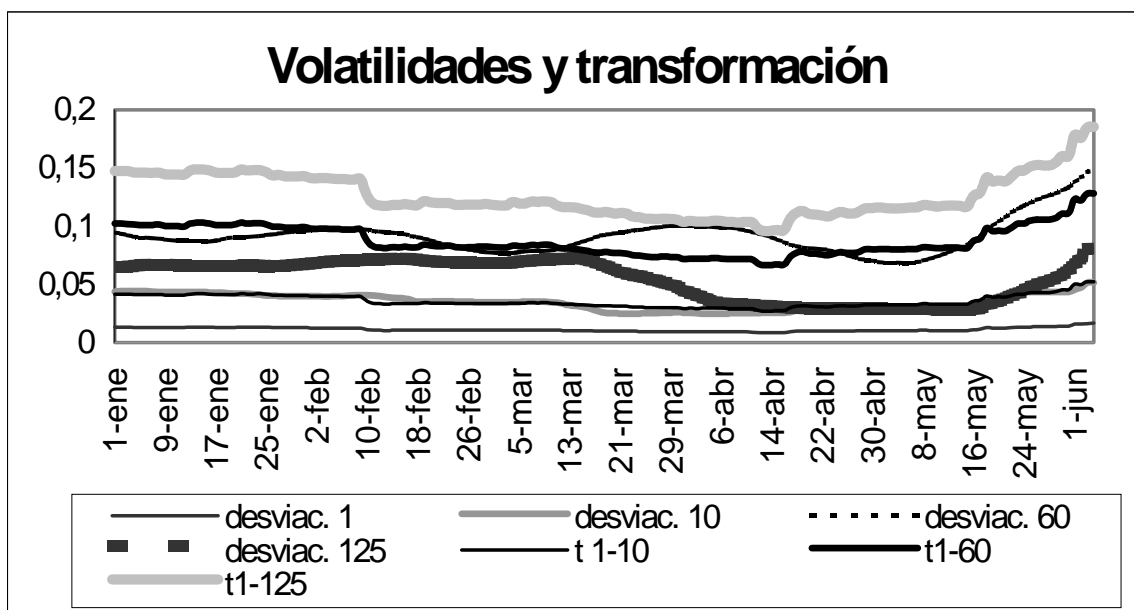
Así por ejemplo, si comparamos el resultado de transformar una estimación VaR de 1 día, de -100 unidades monetarias, a 10, 20 y 60 días, para distintos grados de estabilidad resulta que:



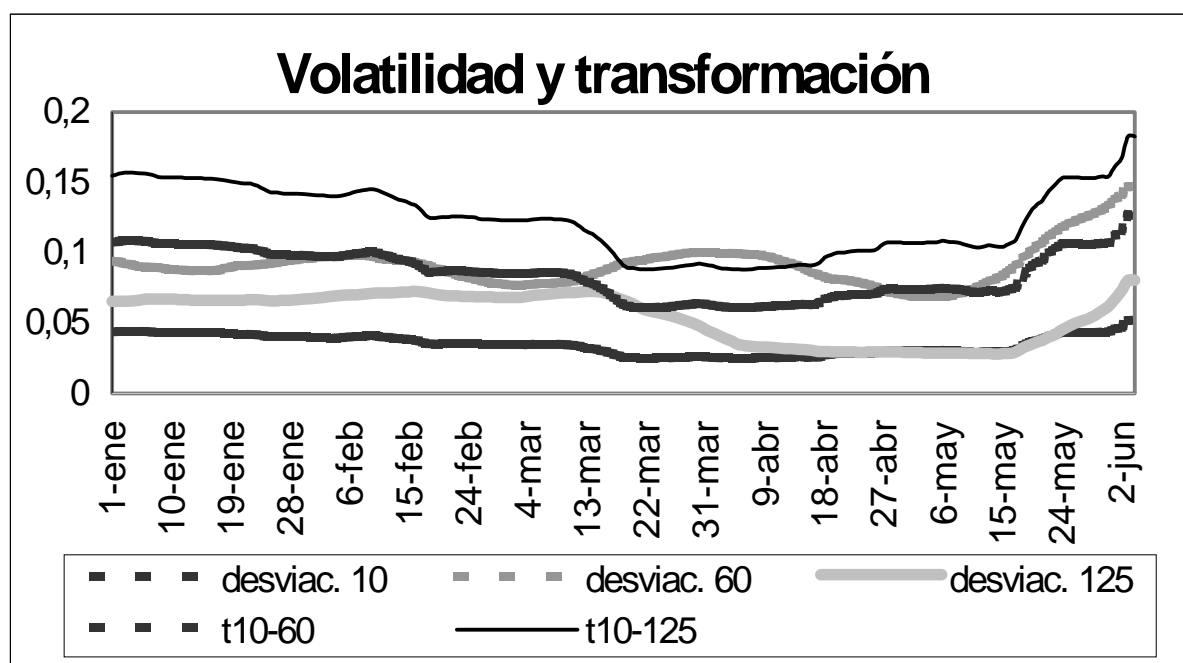
Por tanto, a menor grado de estabilidad la regla de la raíz cuadrada es más errónea, el error también es mayor cuando el plazo de transformación aumenta, aunque disminuye al aumentar el grado de estabilidad.

Pero para clarificar más este error, por ejemplo, si transformamos la volatilidad a 1 día de Unión Fenosa en 1996, a períodos superiores de 10, 60 y 125 días, aplicando la regla de la raíz cuadrada del tiempo, obtenemos:





Y transformando la volatilidad a 10 días de Unión Fenosa en 1996, a períodos superiores de 60 y 125 días, aplicando la regla de la raíz cuadrada del tiempo, resulta:

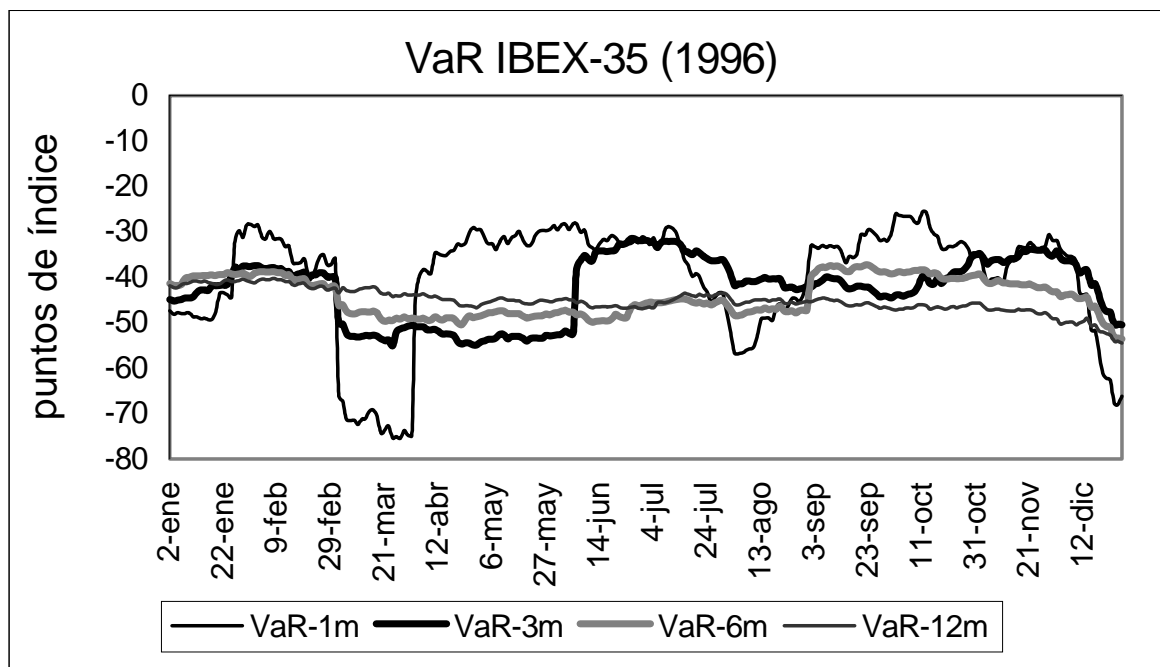


Como puede comprobarse en ambos casos, el error cometido lleva a sobrestimar la volatilidad, lo que nos hace pensar que el índice de la cola no es 2, sino inferior.

## 2. Volatilidad y base histórica.

Como se ha considerado que la volatilidad es constante en el tiempo (homocedasticidad), entonces resultaría indiferente el tamaño de la base empleada para el cálculo, pero si

comprobamos esto con un ejemplo en el que estimamos el VaR sobre una posición larga en el IBEX-35 para 1996, con un horizonte temporal de 1 día, un nivel de confianza del 90%, empleando diferentes bases históricas para calcular la volatilidad (1, 3, 6 y 12 meses), obtenemos:



Otra forma de solventar el problema de la base ha sido ponderar las observaciones<sup>1</sup>, con lo que se pretende dar mayor preponderancia a los valores más actuales de la serie. De esta forma, la media móvil ponderada exponencialmente de  $n$  observaciones sería:

$$\frac{R_{t-1} + \lambda \cdot R_{t-2} + \dots + \lambda^{n-1} \cdot R_{t-n}}{1 + \lambda + \dots + \lambda^{n-1}} = \mu$$

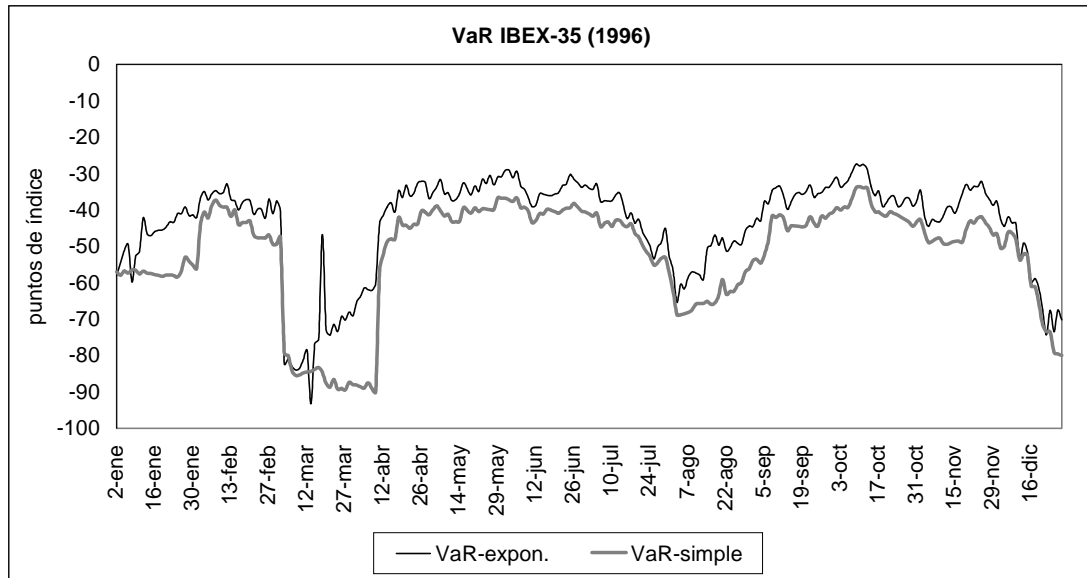
De tal manera que la volatilidad podrá calcularse como:

$$\sigma^2 = (1 - \lambda) \cdot \sum_{t=n-k}^{n-1} \lambda^{t-1} \cdot (R_t - \mu)^2$$

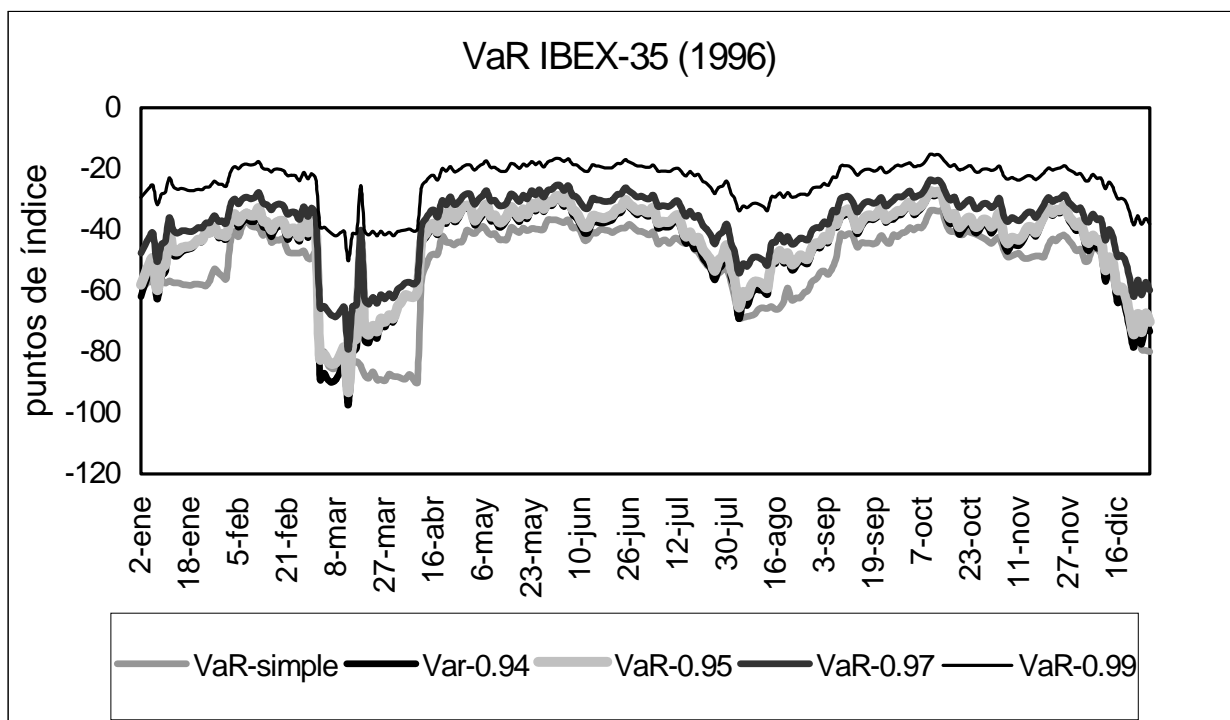
Este camino lo sigue por ejemplo el Risk Metrics, tomando una LAMBDA de 0,97 para la estimación mensual, y de 0,94 para la diaria.

<sup>1</sup> No puede olvidarse que el coeficiente tomado para ponderar debe ser aquel que minimice el error entre la volatilidad estimada y la real para un período de tiempo determinado.

Si estimamos el VaR para una posición larga en el IBEX-35, con un nivel de confianza del 95%, una base histórica de 25 datos, un horizonte temporal de 1 día, empleando la ponderación exponencial de 0,95 y la estimación simple, el resultado es:



Si ahora calculamos el VaR bajo las mismas condiciones anteriores pero variando la ponderación resulta:



### 3. “Smile” y volatilidad estocástica.

Ante los anteriores problemas en la estimación de la volatilidad se recurre a la volatilidad implícita. El empleo de ésta exige la existencia de un mercado líquido donde se negocien las correspondientes opciones sobre el factor de riesgo. Su estimación conduce a la denominada **MATRIZ DE VOLATILIDADES IMPLÍCITAS**<sup>2</sup>. Esta matriz se obtendría mediante el cálculo de las volatilidades implícitas para opciones con diferentes vencimientos y distintos precios de ejercicio, por encima y por debajo de la ATM (“At The Money” o al dinero), por tanto se trataría de una Estructura Temporal de Volatilidades Implícitas.

En realidad la valoración y cobertura de opciones tiene un problema fundamental en el comportamiento de la volatilidad, pues ésta lejos de ser constante, se ve afectada por el factor tiempo y por el precio de ejercicio. El primero de los fenómenos se define como volatilidad estocástica, y el segundo como volatilidad “smile”, es decir, el primero está influido por el tiempo y el segundo por el precio del subyacente, o lo que es igual, uno genera la estructura temporal de la volatilidad y el otro la sonrisa o mueca de la volatilidad.

La llamada volatilidad “smile” o sonrisa, es decir, la variación de la volatilidad con el precio de ejercicio, tiene sus causas principales en la curtosis, así cuanto mayor sea ésta, mayor será la probabilidad de que tengan lugar las colas gruesas; y en la asimetría, ya que ésta genera la correlación entre la volatilidad y la rentabilidad del activo subyacente, es decir, si la asimetría es cero (comportamiento normal), la correlación también lo será. Así según HULL y WHITE (1998) si la volatilidad (V) y el precio del subyacente (S) no están correlacionados:

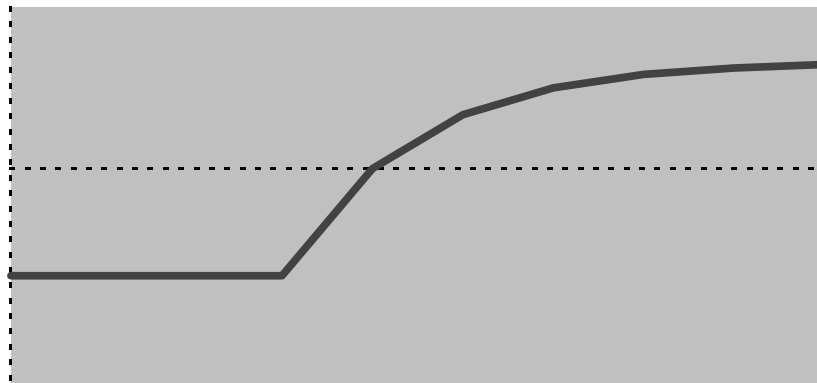
- Opciones ATM: la volatilidad estocástica es una función cóncava frente al precio del derivado, luego los aumentos de V conllevan aumentos menos que proporcionales del precio de la opción, o lo que es igual a mayor incertidumbre no hay mayor precio.
- Opciones “In The Money” y “Out The Money”: la V es convexa, con el consiguiente efecto contrario al anterior.

Gráficamente el valor de una opción call resultaría:

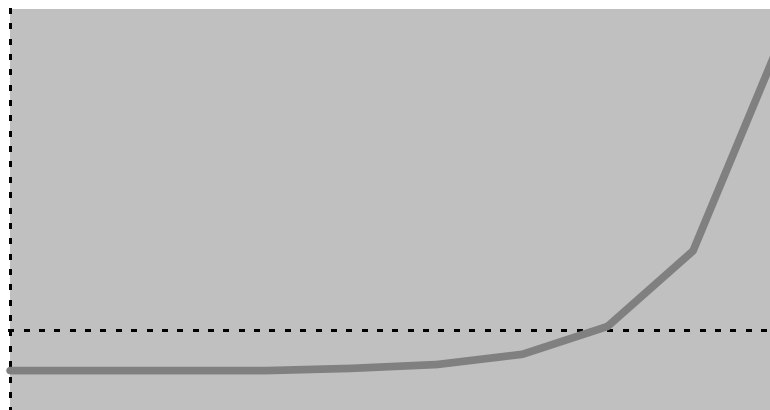
- Si la derivada segunda es positiva, representa CONVEXIDAD, es decir, un aumento de la volatilidad genera un aumento mayor del precio:

---

<sup>2</sup> Ho (1997) estima además las volatilidades “forward”, de manera que sin considerar la correlación entre vértices, establece que la volatilidad del vértice a 6 meses dentro de 6 meses es igual a la diferencia entre la volatilidad actual del vértice a 6 meses y el de 12 meses.

**SMILE CONVEXA**

- Si la derivada segunda es negativa, representa **CONCAVIDAD**, esto es, un aumento de la volatilidad genera un aumento menor del precio:

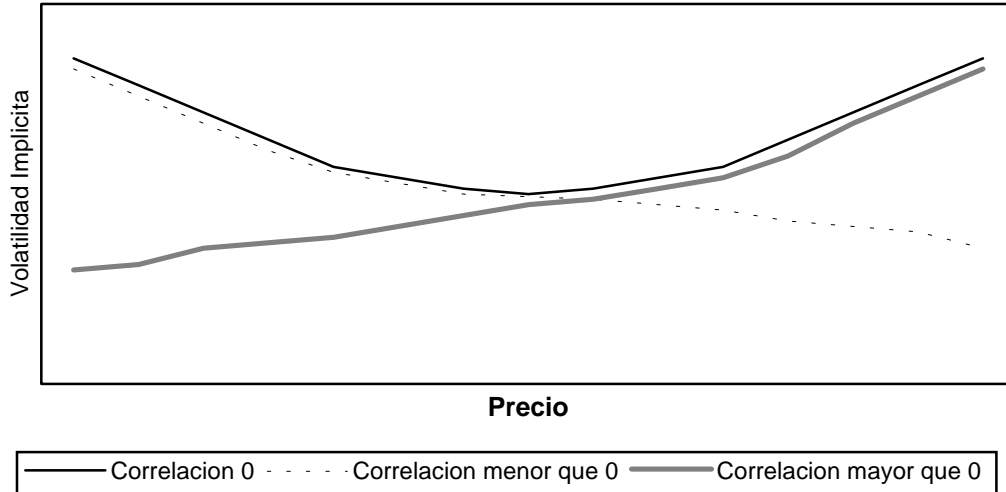
**SMILE CÓNCAVA**

En cambio, si la correlación ( $\rho$ ) entre  $V$  y  $S$  no es nula:

- Si  $\rho_{V,S} > 0$ : a mayor precio, mayor  $V$  con lo que OTM call aumentará de precio y ITM put<sup>3</sup> caerá, y debido a la paridad put-call, ITM call caerán y OTM put subirán.
- Si  $\rho_{V,S} < 0$ : a mayor precio, menor  $V$ , siendo los efectos opuestos a los anteriores.

Este distinto grado de correlación es lo que genere la “smile”, así:

<sup>3</sup> Debido a la asimetría la volatilidad de una opción call con un precio de ejercicio y un vencimiento, no es igual a la correspondiente a la put de igual precio de ejercicio y vencimiento.



Así pues, pueden distinguirse 4 grandes dibujos:

1. Mueca alegre: que conlleva colas gruesas y asimetría.
2. Sonrisa: que supone colas gruesas y simetría.
3. Tristeza o sonrisa invertida: que genera colas delgadas y simetría.
4. Mueca triste: que da lugar a colas delgadas y asimetría.

El problema de la “smile” respecto al modelo Black-Scholes, supone que las opciones muy ITM y muy OTM, se minusvaloren, de esta forma:

“SMILE”	CALL ITM	CALL OTM	PUT ITM	PUT OTM
SONRISA	Infravalora	Infravalora	Infravalora	Infravalora
MUECA	Infravalora	Sobrevalora	Sobrevalora	Infravalora

Al mismo tiempo que se considera la “smile”, hay que tener en cuenta que la volatilidad varía con el tiempo y presenta una reversión a la media, lo cual conduce a estudiar la estructura temporal de la volatilidad, es decir, considerar la volatilidad como una variable estocástica igual que el precio del subyacente. De esta manera la modelización completa será:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu(S_t, \sigma_t, t)dt + \sigma_t dW_t$$

$$\frac{d\sigma_t}{\sigma_t} = \alpha(S_t, \sigma_t, t)dt + \beta(S_t, \sigma_t, t)dZ_t$$

$$|\rho_{Z_t, W_t}| < 1$$

Dentro de esta modelización existen varias propuestas, como la de HULL y WHITE (1998), que toman la correlación como cero, la de HESTON (1993), que considera que la correlación no es nula, y la de ZHU y AVELLANEDA (1997), que modelizan la volatilidad estocástica como:

$$\frac{d\sigma_t}{\sigma_t} = -\frac{1}{2} \cdot \rho_{Z_t, W_t} \cdot v \cdot \sigma_t \cdot dt + v \cdot dZ_t$$

Donde  $v$  sería la volatilidad de la volatilidad.

Al encontrarnos un problema con dos variables estocásticas, una forma de solventarlo es a través de la simulación de Monte Carlo. Esto exige el empleo de dos variables normales  $\varepsilon_{1,i}$  y  $\varepsilon_{2,i}$ , siendo  $i$  el subperíodo dentro de los  $n$ -totales en que se divide el plazo de vencimiento de la opción a valorar ( $1 \leq i \leq n$ ). Así:

$$S_i = S_{i-1} \cdot e^{\left(r - \frac{1}{2} V_{i-1}\right) \Delta t + \sqrt{V_{i-1}} \Delta t \varepsilon_{1,i}}$$

$$V_i = V_{i-1} \cdot e^{\left(\mu_V - \frac{1}{2} \zeta^2\right) \Delta t + \rho \varepsilon_{1,i} \zeta \sqrt{\Delta t} + \sqrt{1-\rho^2} \varepsilon_{2,i} \zeta \sqrt{\Delta t}}$$

Donde  $V$  es la volatilidad estocástica,  $S$  el precio del subyacente,  $r$  la tasa de interés libre de riesgo,  $\Delta t$  es el valor del subintervalo,  $\zeta$  es la volatilidad de la volatilidad,  $\rho$  es la correlación entre la volatilidad y el precio del subyacente y  $\mu_V$  es el valor medio al que revierte la volatilidad.

De esta manera, aplicando las variables de antítesis como control de las simulaciones se obtienen 4 precios para cada  $\varepsilon_1$  y  $\varepsilon_2$ :

$$p_{1,i} \rightarrow f(\varepsilon_{1,i}, \varepsilon_{2,i})$$

$$p_{2,i} \rightarrow f(-\varepsilon_{1,i}, \varepsilon_{2,i})$$

$$p_{3,i} \rightarrow f(\varepsilon_{1,i}, -\varepsilon_{2,i})$$

$$p_{4,i} \rightarrow f(-\varepsilon_{1,i}, -\varepsilon_{2,i})$$

Y además, añadiendo otro control a través de los precios estimados según Black-Scholes:

$$q_{1,i} \rightarrow f(\varepsilon_{1,i}, v_i = v_0 = \text{cte.})$$

$$q_{2,i} \rightarrow f(-\varepsilon_{1,i}, v_i = v_0 = \text{cte.})$$

De manera que se obtienen finalmente:

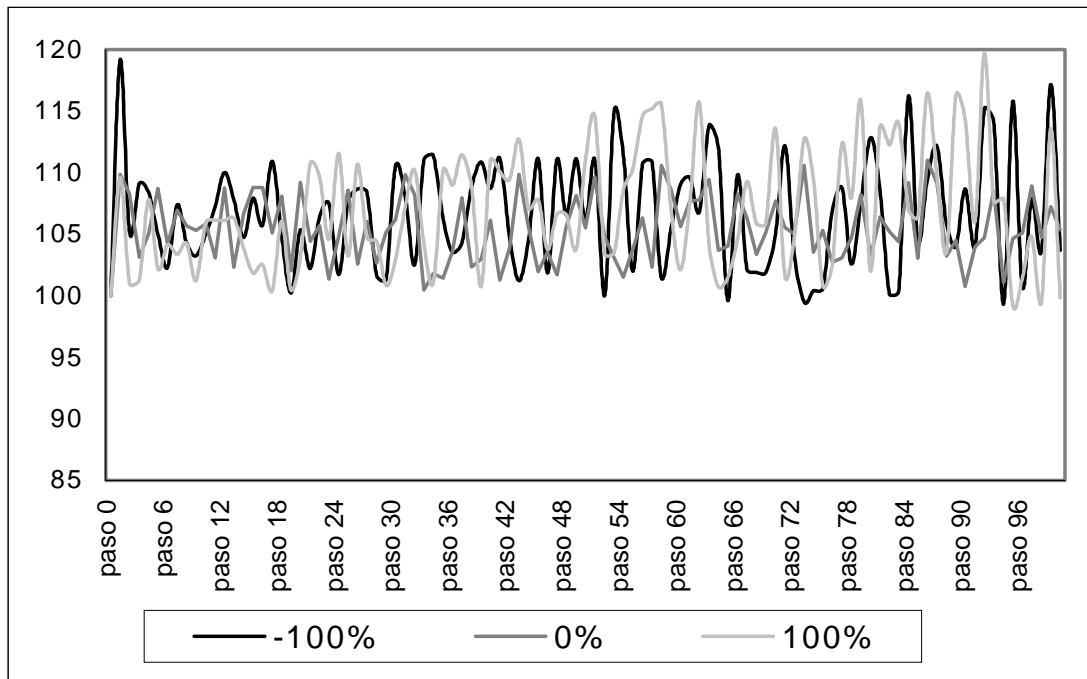
$$y_{1,i} = (p_{1,i} + p_{3,i} - 2q_{1,i})$$

$$y_{2,i} = (p_{2,i} + p_{4,i} - 2q_{2,i})$$

Luego el precio final será el promedio de todas las simulaciones:

$$\text{precio} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[ \frac{1}{2} (y_{1,i} + y_{2,i}) \right]$$

Como muestra gráfica, presentamos la simulación del precio de un activo cuyo valor inicial es 100 unidades monetarias, su volatilidad inicial del 15%, la volatilidad de la volatilidad el 10%, el nivel medio de reversión de ésta es del 12%, y considerando un tipo de interés libre de riesgo del 5%. De esta manera, simulamos el comportamiento en tres situaciones, correlación perfecta negativa, perfecta positiva y ausencia de correlación:

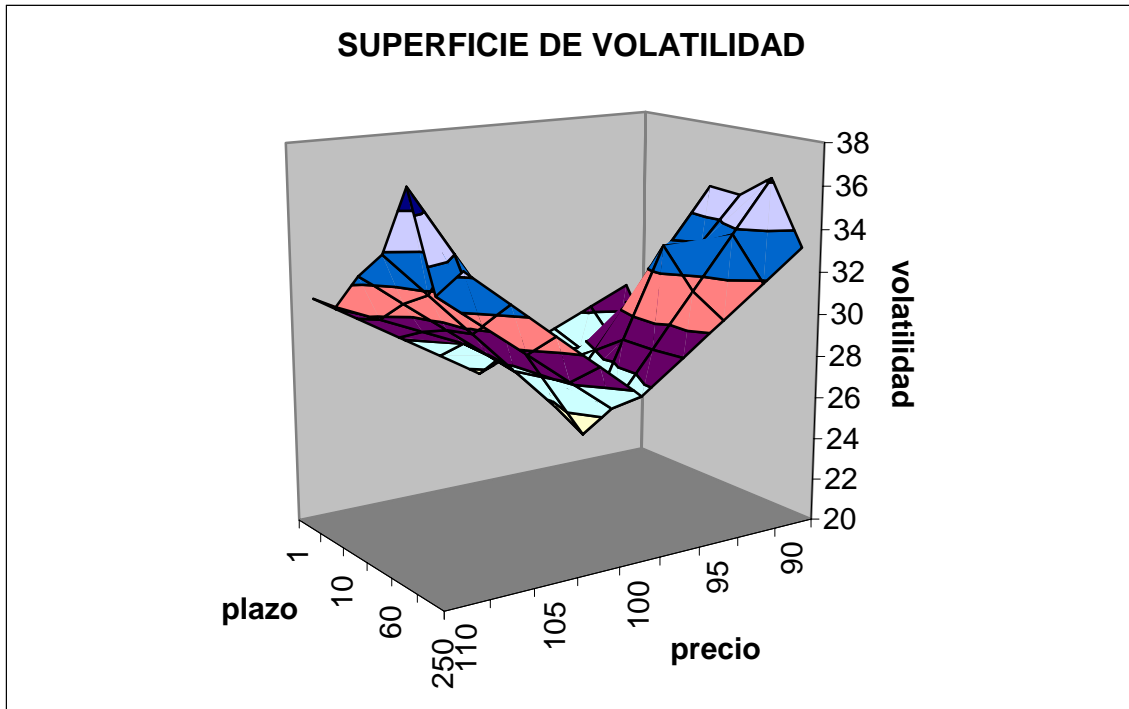


Dado lo complejo de la estimación anterior, se han dado diversas aproximaciones en tiempo discreto a estos procesos, para ello se han empleado los modelos heterocedástico autorregresivos. Así el proceso generalizado autorregresivo heterocedástico (GARCH), es aquel en el que la varianza dependerá del error de p-intervalos anteriores y de la varianza de los q-intervalos previos, por ejemplo un GARCH (1,1) sería:

$$\sigma_t^2 = \beta_0 + \beta_1 \cdot \varepsilon_{t-1}^2 + \gamma_1 \cdot \sigma_{t-1}^2$$



La conclusión final de este apartado es que si se consideran conjuntamente la “smile” y la volatilidad estocástica o estructura temporal, el resultado es una superficie de volatilidades. Así gráficamente sería:



✓ *Problemas en cuanto a la liquidez*

La sonrisa de la volatilidad puede deberse también, además de a la curtosis y la asimetría, a los costes de transacción y a la operativa en tiempo discreto de los agentes, de ahí que se pretenda en ocasiones incluir en el modelo los costes de transacción o diferencial “bid-ask”. Así por ejemplo para una binomial sería:

$$\frac{S_t}{S_{t-1}} = \begin{cases} u \rightarrow \text{probabilidad } (p) \\ d = u^{-1} \rightarrow \text{probabilidad } (1-p) \end{cases}$$

Donde además comprar en un momento t sería:

$$S_t \cdot (1 + \lambda)$$

mientras que vender es:

$$S_t \cdot (1 - \lambda)$$

Siendo  $\lambda$  el coste de transacción que reflejará:

- Costes directos.
- Costes indirectos (“spread bid-ask”).
- Costes de liquidez de mercado.

Respecto a los costes fijos de toda operación no suelen considerarse puesto que si el volumen es importante, son despreciables.

Este resultado se puede aproximar también a través de Black-Scholes sustituyendo  $\sigma$  por  $\sigma^*$ :

$$\sigma^* = \sigma \cdot \left[ \alpha + \frac{2 \cdot \lambda \cdot \sqrt{N}}{\sigma \cdot \sqrt{T}} \right]^{\frac{1}{2}}$$

Donde T es el período total, N el número de intervalos en que se divide el árbol, y  $\alpha$  será 1 menos el grado del árbol, es decir si es binomial (grado 2):

$$\alpha = 2 - 1 = 1$$

Recientemente ha surgido otra idea caracterizada por la posibilidad de emplear toda la información disponible sobre los precios, en lugar de utilizar tan sólo el precio de cierre. En este sentido podemos destacar la propuesta de GARMAN y KLASS (1997), que operan con el precio de apertura (O), de cierre (C), el más alto (H) y el más bajo (L). Con estos precios fabrican las siguientes variables:

$$u_i = H_i - O_i$$

$$d_i = L_i - O_i$$

$$c_i = C_i - O_i$$

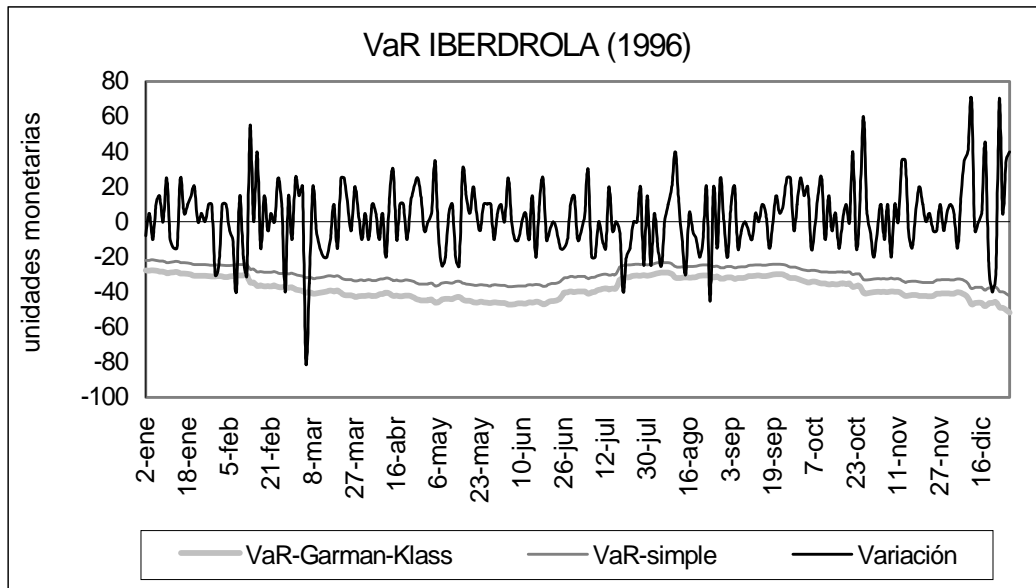
Si bien la estimación tradicional trabaja con precios de cierre, lo que conlleva como ventaja que el espacio temporal de observación es constante, en cambio, su desventaja nace al ignorar la amplitud del movimiento del precio, y por tanto, despreciar esta información, que es pública. De esta manera, si la propuesta tradicional de operar con precios de cierre la enunciamos como:

$$\hat{\sigma}_0^2 = (C_i - C_{i-1})^2$$

GARMAN y KLASS (1997), en cambio realizan entre otras la siguiente propuesta:

$$\hat{\sigma}_K^2 = \frac{1}{2} \cdot (u - d)^2 + [2 \cdot \ln(2)] \cdot c^2$$

Si aplicamos esta metodología a una cartera compuesta por un título de Iberdrola, y estimamos el VaR para un nivel de confianza del 95%, una base de 90 datos y un horizonte temporal de 1 día, obtenemos:



#### ✓ Problemática de la correlación

Algunas cuestiones que deben tenerse en cuenta sobre la correlación y la estimación del riesgo son:

- Al medir el riesgo se necesita conocer la distribución conjunta de todos los factores, puesto que la correlación unida a las distribuciones marginales supone que se incumpla el principio de subaditividad, como comprobamos en la pregunta anterior.
- Si los factores se comportan como una normal, dicha distribución conjunta será elipsoide o esférica, y podrá definirse a partir de las distribuciones de cada factor y las correlaciones lineales entre ellos.
- Si la distribución no es elipsoide o esférica, entonces para una determinada correlación, existen infinitas posibles distribuciones. Además conocidas las distribuciones de los factores, cualquier combinación lineal de ellas entre  $-1$  y  $+1$ , no será una distribución conjunta adecuada, pues fuera del mundo elipsoide el intervalo que fija la posible combinación lineal, será:

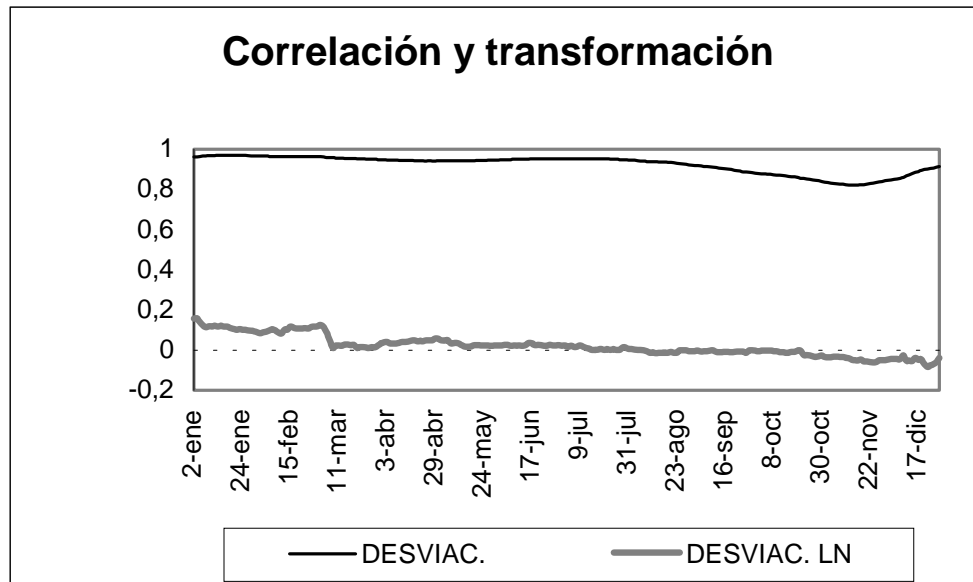
$$0 \subset [\rho_{\min.}; \rho_{\max.}] \in [-1; +1]$$

Así por ejemplo, una lognormal tiene un intervalo de (-0,09; +0,666). El significado de una correlación mínima y máxima es el de la perfecta correlación negativa y positiva, respectivamente, luego perfectamente correlacionado no significa siempre que el valor absoluto de la correlación sea 1, así como que su valor sea 0, tampoco significa que exista independencia entre los factores.

- Transformaciones de los factores afectan a la correlación, esto es:

$$\rho(x, y) \neq \rho[\ln(x), \ln(y)]$$

Si comparamos la correlación de Unión Fenosa e Ibedrola sobre la variación de los precios y los precios, comprobamos que:



Como puede verse, no sólo el valor de la correlación es diferente, sino que al transformar los precios hay momentos en los que la correlación del logaritmo es negativa, mientras que la correlación del precio es muy elevada, y siempre positiva.

- La correlación sólo está definida cuando la varianza es finita, y por tanto, la correlación lineal no será una medida adecuada de la dependencia para distribuciones de colas gruesas y varianzas infinitas.

Para evitar estos problemas se puede trabajar con el rango de correlación (Kendall y Spearman), definido como:

$$\text{rank } \rho(x, y) = \rho[F_x(x), F_y(y)]$$

Donde F es la función de distribución de la variable. Pero no solventamos todos los problemas, aún permanece el hecho de que un valor de cero representa la independencia, y además no informa directamente sobre la dependencia de los factores. Sin olvidar que conlleva una compleja manipulación respecto a la correlación lineal.

La solución propuesta por EMBRECHTS, McNEIL y STRAUMANN (1999) son las duplas (D), esto es, si hay dos factores de riesgo x e y, cuyas distribuciones son F(x) y G(y), y además se conoce la distribución conjunta H(·), entonces puede determinarse la probabilidad condicional de que un factor tome un valor, habiendo tomado el otro un determinado precio, luego:

$$H(x, y) = D[F(x), G(y)]$$

Una característica de las duplas es que son invariantes ante incrementos y transformaciones continuas de x e y, lo que no cumple la correlación ni el rango de correlación.

Además las duplas tienen unos límites definidos por:

$$D_d = \max(F_1(x_1) + F_2(x_2) + \dots + F_n(x_n) - 1; 0) \leq D(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n)) \\ D(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n)) \leq D_u = \min(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n))$$

De manera que:

- Si  $D = D_u$ , las variables serán comonóticas, esto es, perfecta y positivamente dependientes.
- Si  $D = D_d$ , entonces serán contramonóticas, es decir, perfecta y negativamente dependientes.

En resumen, las propiedades que debe cumplir una correcta medida de la correlación son:

- Simétrica.

$$\rho(x, y) = \rho(y, x)$$

- Normalizada.

$$-1 \leq \rho(x, y) \leq +1$$

- Monotonicidad.

$$\rho(x, y) = 1 \rightarrow (x, y) = \text{comonólicas}$$

$$\rho(x, y) = -1 \rightarrow (x, y) = \text{contracomonólicas}$$

- Transformación.

$$\rho(T(x), x) = \begin{cases} \rho(x, y) \rightarrow \text{incrementando } T \\ -\rho(x, y) \rightarrow \text{disminuyendo } T \end{cases} \rightarrow T(x) = y = \begin{cases} \text{si } D = D_u \rightarrow G^{-1}(y) \Rightarrow F(x) \text{ aumenta} \\ \text{si } D = D_d \rightarrow G^{-1}(y) \Rightarrow 1 - F(x) \text{ disminuye} \end{cases}$$

De todas estas propiedades la correlación lineal sólo cumple las dos primeras.

Estas complejas relaciones podrían simularse por Monte Carlo.

✓ *Problemas en cuanto a la valoración de las posiciones*

El problema que se presenta con la valoración estriba en el hecho de que no exista mercado para ciertas operaciones, denominadas OTC (“Over The Counter”). Esto hace que la entidad tome un modelo de valoración, que a su vez, fija una serie de hipótesis de partida sobre el comportamiento del precio. Estas hipótesis desde Black-Scholes se representan a través del comportamiento estocástico del precio, pero no se consideran ciertos fenómenos de salto en dichos procesos, bien intrínsecos al precio, o bien generados de forma externa, como puede ser el pago de un dividendo o la realización de una ampliación de capital. Estos saltos se pueden recoger a través de una distribución de Poisson, en la que la probabilidad de salto será  $\lambda \cdot dt$  y la intensidad del mismo sería  $R$ . Este proceso podemos reflejarlo como:

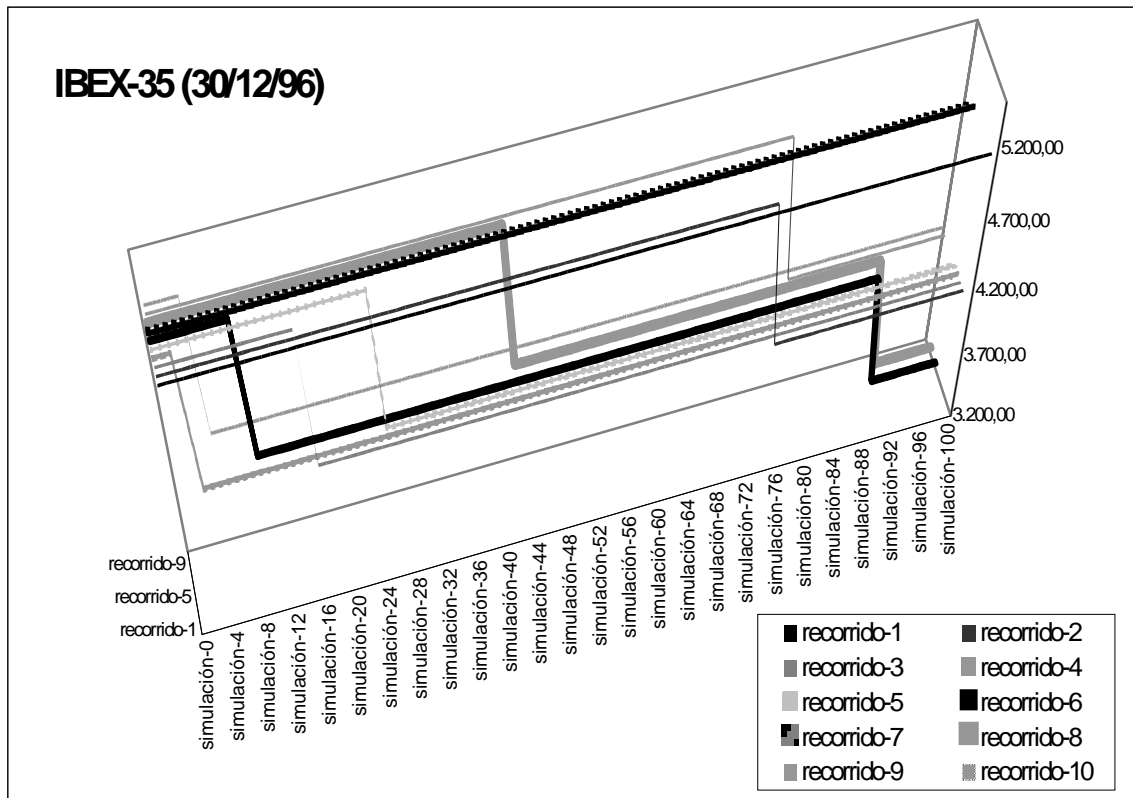
$$dS = \mu_S \cdot S \cdot dt + \sigma_S \cdot S \cdot dW_t + (1 - R) \cdot S \cdot dq$$

Con lo que la simulación del precio resultaría:

$$S_t = S_{t-1} + \mu_S \cdot \Delta t + \sigma_S \cdot \sqrt{\Delta t} \cdot \varepsilon_{1,t} - I_Z \cdot S_{t-1} \cdot R$$

$$I_Z = \begin{cases} 0, & \text{si } \varepsilon_{2,t} > \lambda \cdot (1 - R) \\ 1, & \text{si } \varepsilon_{2,t} < \lambda \cdot (1 - R) \end{cases}$$

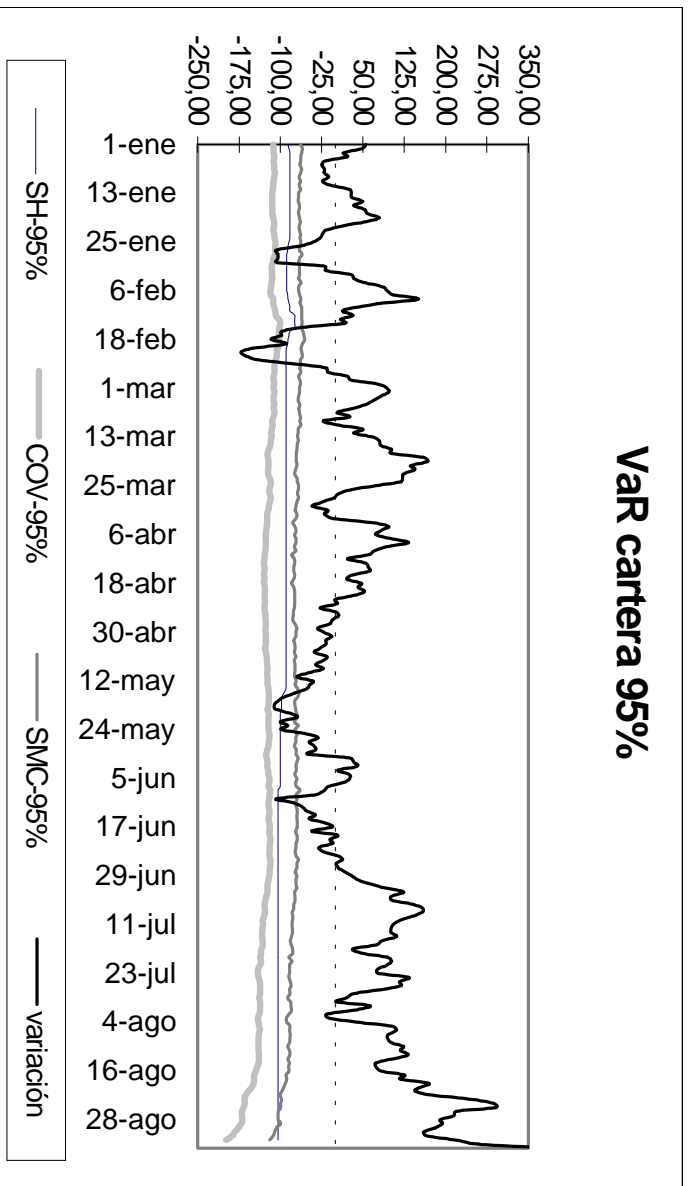
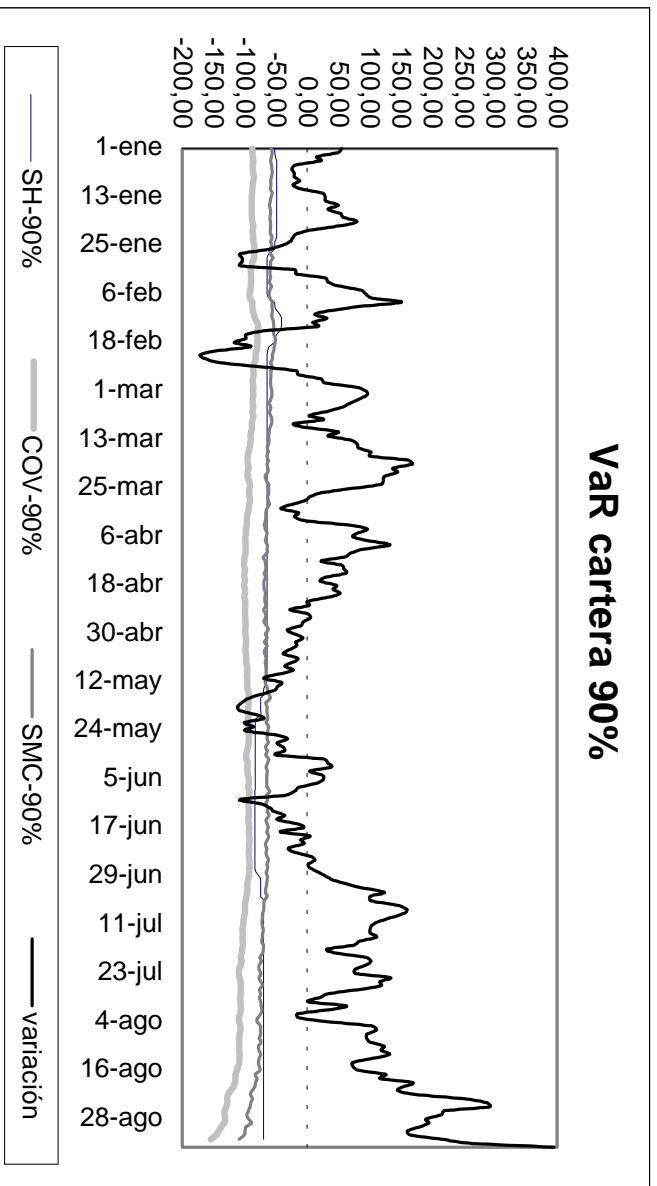
Si aplicamos lo anterior sobre el comportamiento del IBEX-35, cuyo precio spot el 30 de diciembre de 1996 era de 5.144,44, con una volatilidad anualizada del 13,12%, una rentabilidad media anualizada del 41%, una probabilidad de salto del 1%, con una intensidad del 80%, quedaría:



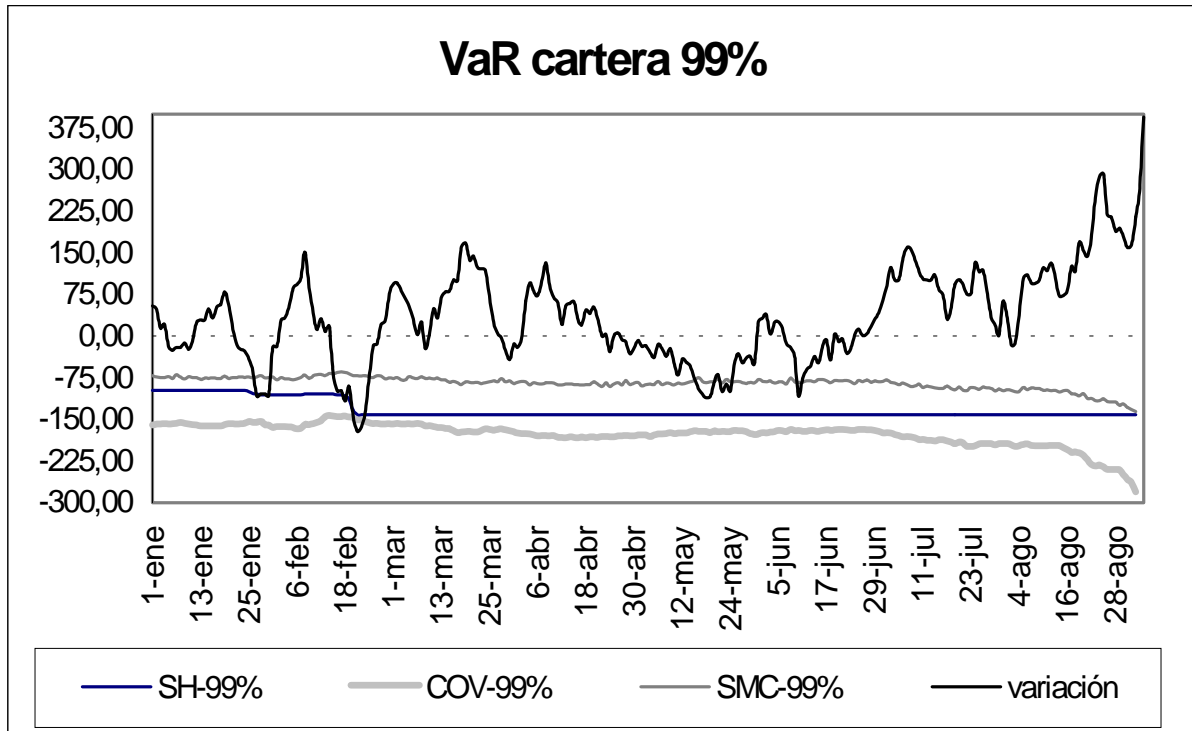
✓ *Problemas según la técnica empleada*

Cómo hemos podido comprobar hasta aquí, según cuáles sean los parámetros iniciales y el modelo empleado, existen infinitud de posibilidades de estimación del riesgo en función de la metodología VaR, lo que hace difícil elegir una aplicación práctica concreta, de manera que cada entidad deberá buscarla para cubrir sus necesidades y objetivos. Esto ya lo pusieron de manifiesto MARSHALL y SIEGEL (1996) que entregaron una hipotética cartera a vendedores de software que aplican RiskMetrics<sup>TM</sup>, obteniendo una gran divergencia en cuanto los resultados finales.

Si comparamos el resultado obtenido por cada una de las técnicas de simulación histórica (SH), matriz de covarianzas (COVAR) y simulación de Monte Carlo (SMC), para una cartera compuesta por una acción de Unión Fenosa y otra de Iberdrola, a lo largo de 1996, para un horizonte temporal de 10 días, los resultados para distintos niveles de confianza son:







En cuanto a los inconvenientes principales de estos tres métodos podemos enumerarlos como sigue:

- **MATRIZ DE COVARIANZAS:**

- \* Que la matriz sea definida positiva.
- \* No considera eventos distorsionadores, por lo que habrá que emplear análisis complementarios, ya que la varianza es la media de las dispersiones respecto del valor esperado.
- \* Dificultad para fijar el horizonte de cálculo y el nivel de confianza, así como la inconsistencia de la extrapolación de resultados diarios a otros períodos cuando la distribución no es una normal.
- \* Problemática en la estimación de la volatilidad debido a que no es constante, ello lleva a emplear otros modelos del tipo autorregresivo o estocástico.
- \* Que la distribución de probabilidad asignada al factor de riesgo, según la base histórica, no se corresponda con el comportamiento futuro del mismo.
- \* No considera la curtosis y la asimetría (cimas inclinadas a la izquierda y colas gruesas) en las distribuciones.

- \* Dificultad de efectuar el “mapping” para ciertas posiciones, en cuyo caso ha de recurrirse al desarrollo de Taylor, con el consiguiente error de aproximación.
  - \* Si la posición no puede valorarse a precios de mercado, o su comportamiento no es lineal, no resulta aplicable, aunque en este último caso existen diversas aproximaciones, como delta y delta-gamma, o bien la utilización de modelos de simulación. En cualquier caso es preciso determinar el comportamiento de los precios, lo cual también se hace de forma aproximada.
  - \* Necesidad de una base histórica sobre la que estimar la volatilidad y la correlación de los factores de riesgo. Esto conlleva el problema de los datos perdidos y el período de observación necesario.
- **SIMULACIÓN HISTÓRICA:**
    - \* Caja negra, sobre todo en las correlaciones.
    - \* Necesidad de una amplia base de datos.
    - \* Dificultad para fijar el horizonte de cálculo y el nivel de confianza.
    - \* Considera que el comportamiento pasado se repetirá en el futuro.
    - \* La simulación histórica es extremadamente conservadora en momentos de estabilidad o en aquéllos en los que la tendencia se mueve favorablemente para la posición de la empresa, y presenta un problema de predicción de cambios de tendencia que afecten negativamente a la empresa, fundamentalmente cuando hayan sido precedidos de momentos de bonanza.
  - **SIMULACIÓN DE MONTE CARLO:**
    - \* Prefijar un modelo de comportamiento del precio de mercado del factor de riesgo, que puede no reproducirse igual en el futuro.
    - \* Grandes necesidades técnicas y de personal cualificado.
    - \* Dificultad para fijar el horizonte de cálculo y el nivel de confianza.

Si comparamos el método de la matriz de covarianzas (COVAR), con la simulación de Monte Carlo (SMC) y con la simulación histórica (SH), resulta que:

CUESTIÓN	COVAR	SMC	SH
Asunción sobre distribuciones	normal	varía	empírica
Elementos no lineales	parcial	completo	completo
Flexibilidad para introducir nuevos instrumentos	no	si	si
Velocidad de cálculo	media	baja	alta

De todo ello se deduce que el VaR no es un único valor, sino que fluctuará en función de las decisiones iniciales que se adopten sobre el modelo, y por ello el análisis del riesgo a través de esta metodología quedaría incompleto si no se acompañase de otros análisis complementarios. Se pretende pues, establecer más que la bondad del modelo VaR empleado, lo cual será un objetivo estadístico, completar la información suministrada, con la intención de facilitar la toma de decisiones.

Aunque este problema, al igual que muchos otros de los anteriores, se ha pretendido salvar aumentando el nivel de confianza, hemos de tener en cuenta el estudio de HULL y WHITE (1998). Así para probar la bondad de cada método estiman el VaR al 95% y al 99%, de manera que el objetivo que fijan es maximizar la protección para el capital requerido por cada método, modificado según las exigencias del BIS:

$$\frac{R_t}{\overline{\text{VaR}_t^J}} \cdot \frac{\overline{\text{VaR}^J}}{\overline{\text{BIS}}} = \text{ratioutilización capital}$$

Donde  $R_t$  son los resultados desde  $t$  hasta  $t+10$ ,  $\text{VaR}_t^J$  es el capital requerido por el método  $J$  en el momento  $t$  con el horizonte 10 días, y la modificación:

$$\frac{\overline{\text{VaR}^J}}{\overline{\text{BIS}}}$$

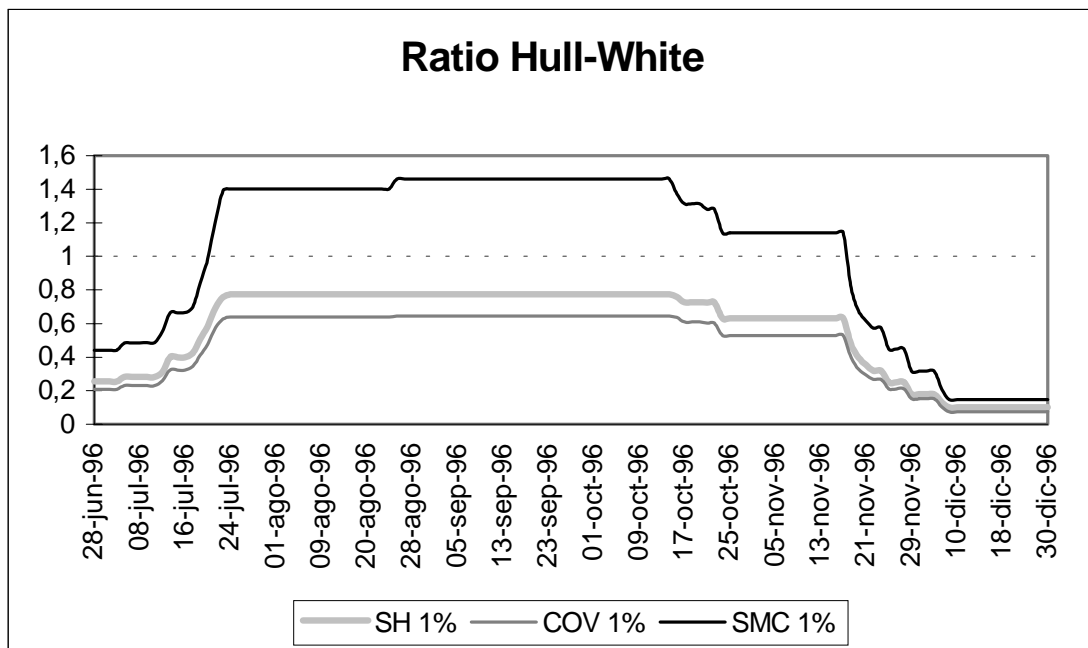
representa la relación media entre el método y la regulación, ya que:

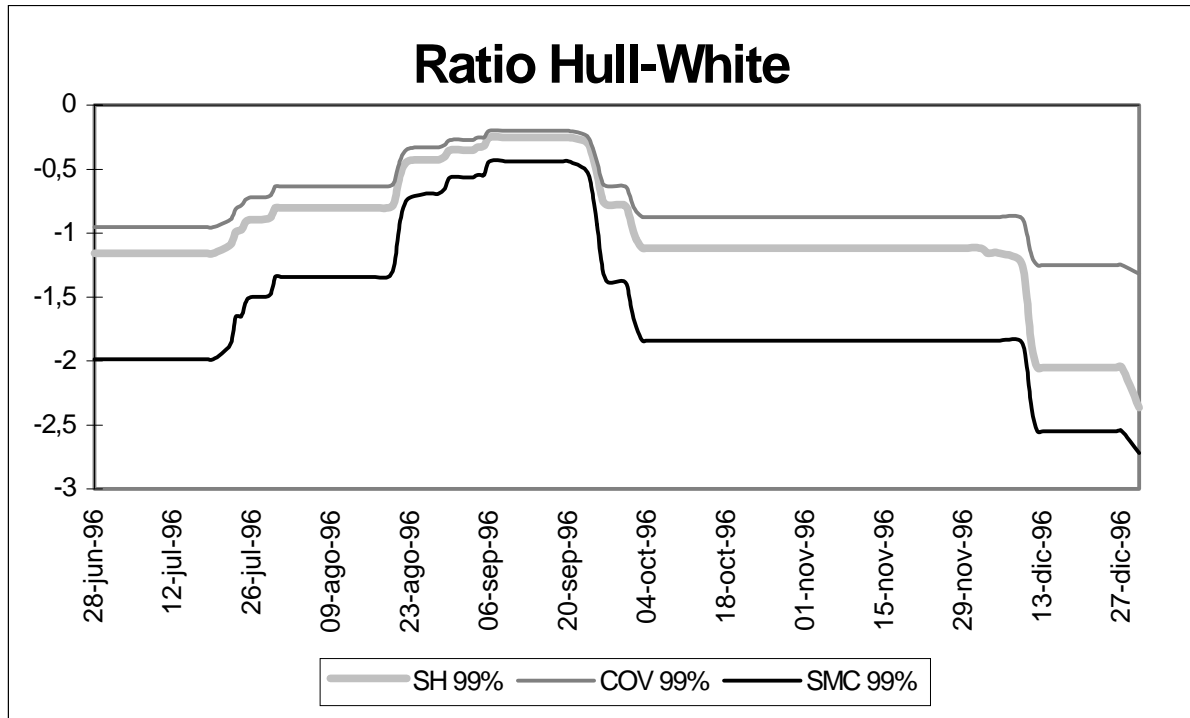
$$\overline{\text{BIS}} = 3 \cdot \max(\overline{\text{VaR}_{t-1}^J}; \text{VaR}_{60}^J)$$

Esto es, dependerá del método  $J$  elegido. Con estos datos para cada método construyen un histograma y eligen un percentil, obteniendo así el método más eficiente respecto a la normativa BIS. De esta forma los resultados obtenidos deben interpretarse en dos sentidos:

- Si el resultado es una pérdida, entonces el ratio será positivo, es decir, su límite inferior será cero y el superior más infinito, siendo mejor cuánto más próximo a 1, pues indicará una mejor predicción. En cambio, cuanto más cerca de cero se encuentre, mayor será el error de estimación por exceso (recursos ociosos). Por el contrario, cuanto mayor sea el valor del ratio, el error de estimación por defecto será más grave.
- Si el resultado es un beneficio, el ratio tendrá un valor negativo, siendo el límite superior cero y el inferior menos infinito. Así pues, cuánto más próximo a cero será peor, puesto que indicaría una sobreestimación del riesgo (recursos ociosos)

Si mostramos este indicador para la cartera compuesta por una acción de Unión Fenosa y otra de Iberdrola, estimando el riesgo por simulación histórica (SH), matriz de covarianzas (COV) y simulación de Monte Carlo (SMC), con un nivel de confianza del 99%, y estimamos el ratio de HULL-WHITE (1998) con un nivel de confianza del 99% para el ratio con valor negativo, y por consiguiente 1% para el valor positivo, obtenemos:





De los gráficos anteriores podemos extraer las siguientes conclusiones:

- Cuando el ratio tiene un valor positivo, es decir, se presentan pérdidas, el método que más exceso tiene en la predicción es el de la matriz de covarianzas, y el peor método por defecto es el de Monte Carlo.
- Cuando el ratio tiene valor negativo, por tanto, existen beneficios, el método que peor predice, con los consiguientes recursos ociosos, es el de la matriz de covarianzas, mientras que el mejor es el de Monte Carlo.
- En resumen, la simulación histórica en términos generales o medios es el mejor método.

### 3. LA NECESIDAD DE LOS ANÁLISIS COMPLEMENTARIOS

Debido a los problemas detectados en las técnicas de medición de riesgos, y con la intención de garantizar la fiabilidad de la estimación, planteamos la estimación del riesgo como una cuestión que debe realizarse en 3 niveles:

- Probable pérdida: VaR
- Situaciones críticas futuras.
- Validez del modelo.

Como en apartados anteriores hemos estudiado los problemas de la metodología VaR, en los siguientes analizaremos tanto los métodos aplicables en las situaciones críticas, como las técnicas de validación de los modelos internos VaR.

Para el estudio de las situaciones críticas existen unos análisis complementarios, que muestran los puntos débiles de la entidad, así como de los resultados que se producirían ante grandes cambios de la volatilidad; el principal inconveniente deriva de la fijación de los escenarios de prueba, lo cual dependerá de la experiencia del gestor, quién no puede olvidar, al emplear estas técnicas, las correlaciones entre las variables y evitar contravenir las condiciones de no arbitraje.

Por otro lado, la validación del modelo exigirá otro tipo de análisis estadísticos y pruebas de error.

#### 3.1. PRUEBAS ANTE SITUACIONES CRÍTICAS FUTURAS

En la actualidad se diferencian varios métodos en la aplicación de esta técnica:

##### ✓ *Análisis de ESCENARIOS*

Este tipo de análisis también se conoce como “STRESS TEST” o pruebas de tensión, consistentes en calcular para la posición actual la pérdida que se produciría en escenarios extremos de cambios del mercado previamente seleccionados (fluctuación del precio de mercado expresado en número de veces de la volatilidad, en puntos básicos o en porcentaje), así como de las correlaciones entre factores de riesgo.

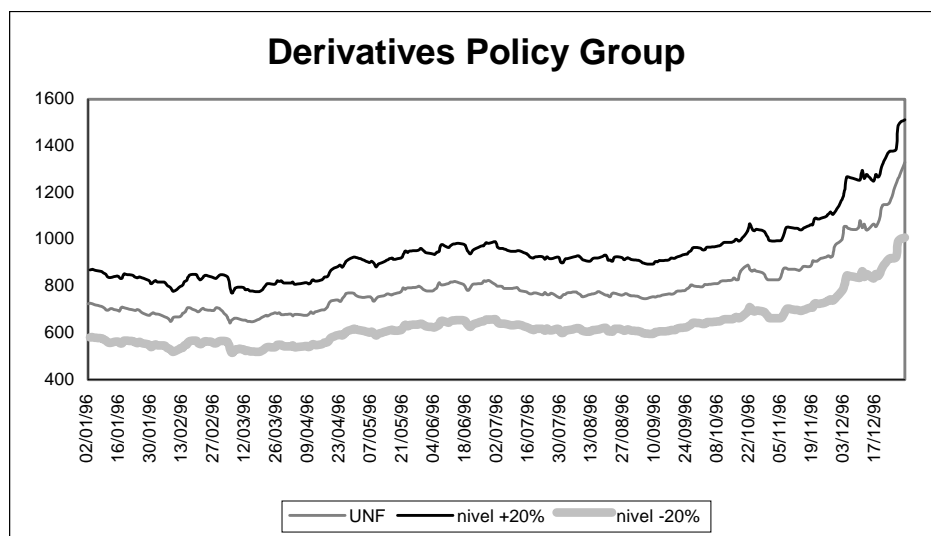
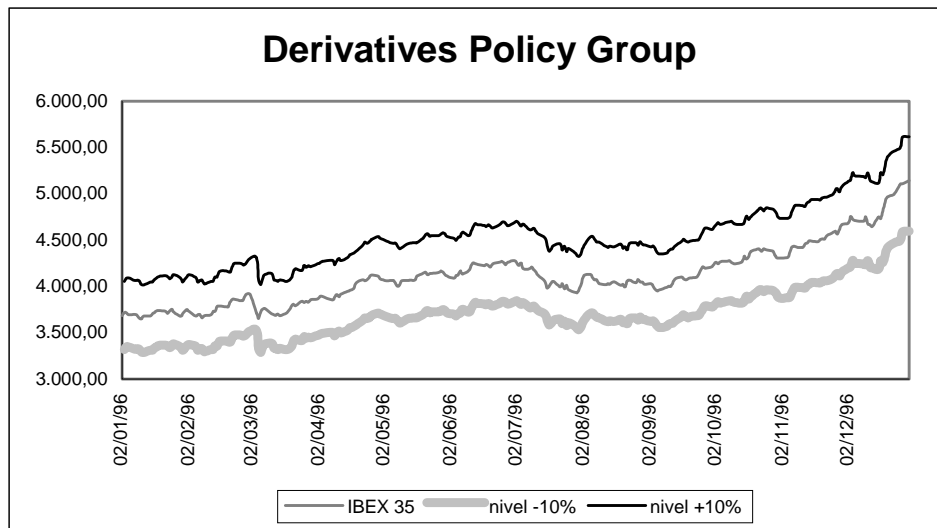
La cuestión fundamental será fijar las fluctuaciones críticas que afecten a las posiciones, para ello pueden emplearse tres posibilidades:

- “Stress test” hipotético.

Las variaciones se fijarán de forma subjetiva, con lo cual será fundamental la experiencia del gestor. Dentro de estos posibles escenarios destacan los propuestos por el Derivatives Policy Group:

1. Movimientos paralelos de la Estructura Temporal de los Tipos de Interés de  $\pm 100$  p.b. y de  $\pm 25$  p.b. de rotación.
2. Movimientos del valor de índices de mercado de  $\pm 10$  %.
3. Movimientos de los tipos de cambio de  $\pm 6$  %.
4. Cambios en la volatilidad de los precios corrientes de  $\pm 20$  %.

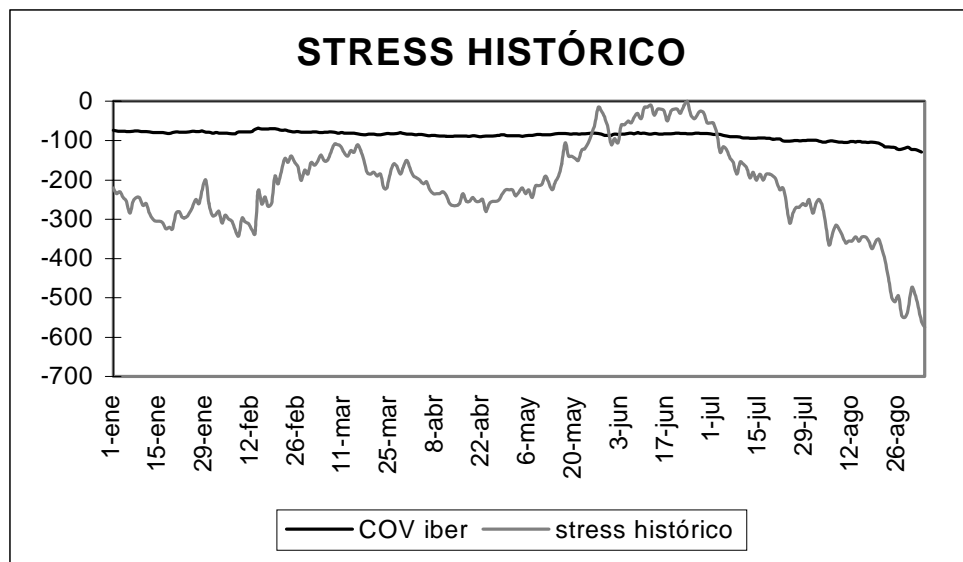
Si aplicamos esta propuesta sobre el IBEX-35 y sobre el título Unión Fenosa para 1996, resulta:



Como puede comprobarse los niveles de variación propuestos resultan excesivos, de forma que existirá un gran volumen de recursos ociosos. Pero resulta aún más débil esta propuesta por su débil base científica.

- “Stress test” histórico.

Consistiría en simular los resultados que se obtendrían al cerrar las posiciones actuales según situaciones críticas pasadas y eventos históricos significativos. Para comprobar el riesgo que se asumiría recurrimos una cartera compuesta por una acción de Iberdrola durante el año 1996, de manera que el precio más bajo entre los 90 datos previos en el mercado, constituiría el evento crítico histórico de cierre de la posición, para mostrar su significación lo comparamos con el VaR por matrices de covarianzas:

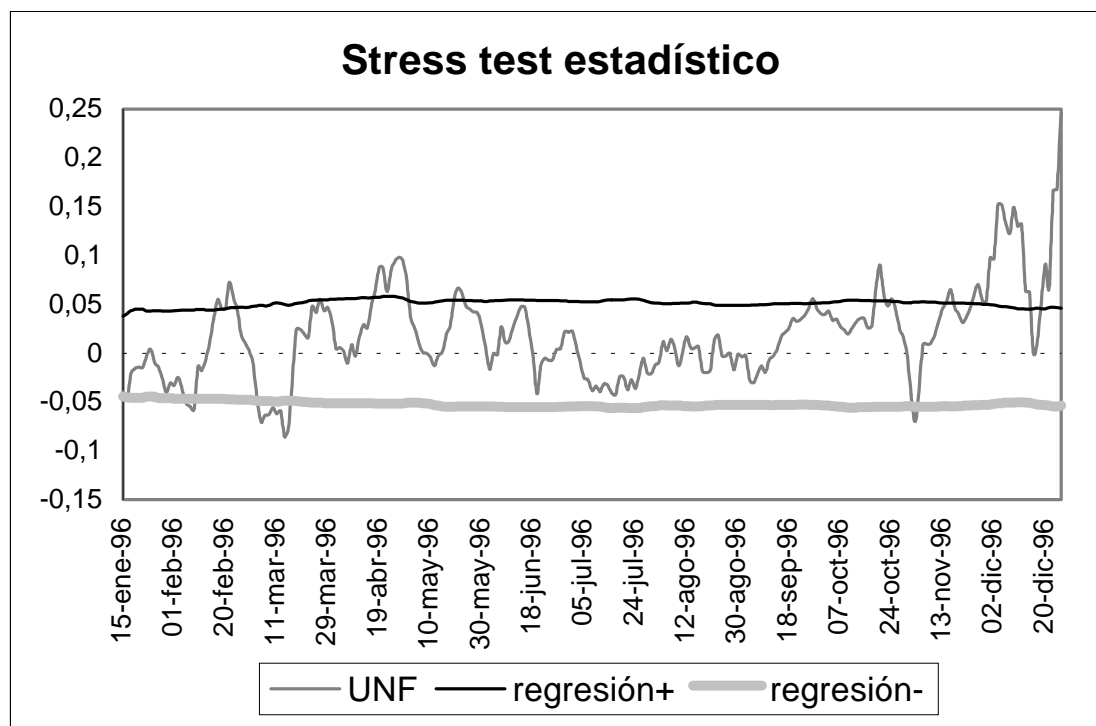


- “Stress test” estadístico.

Dado el elevado número de posibles escenarios y que las crisis no se repiten igual, esto conduce a construir una matriz de posibilidades para diferentes rangos de precios. Según éstos los escenarios a probar son muchos, con lo que deberán reducirse para ganar tiempo. Esto se logra simulando sólo aquellos factores de riesgo a los que la empresa sea más sensible y no estén correctamente cubiertos o medidos a través del VaR. Para ello se emplean técnicas estadísticas, por ejemplo, la formulada por MORRISON (1999), el cual elabora un modelo de regresión de sección cruzada de todos los factores de riesgo deseados sobre la cartera, y posteriormente comprueba la incidencia sobre ésta de variaciones en el valor de dichos factores. Para la estimación de dicha regresión puede emplearse desde el método lineal más simple, hasta los más efectivos, como la regresión de autocorrelación heterocedástica de SAS.



Planteamos un ejemplo de regresión simple sobre Unión Fenosa, empleando como variables independientes el MIBOR-360 y el IBEX-35, sobre variación a 10 días y tomando una variación o “stress” de  $\pm 5\%$  en dichas variables. El resultado ajusta mucho más que las anteriores técnicas, de forma que a medida que se elija una variación más acertada y una técnica estadística más depurada el resultado debería mejorar. Gráficamente obtenemos:



Como resulta evidente de este apartado, es preciso conocer la sensibilidad de la entidad a cada factor de riesgo como consecuencia de las diferentes posiciones que componen su cartera, de forma que pueda simular situaciones extremas para aquellos casos más críticos. Esto lo analizaremos en el siguiente apartado.

**En la búsqueda de los objetivos anteriores, se han desarrollado diferentes técnicas dentro del “stress test” estadístico y que podemos agrupar en:**

1. No condicional, donde el rendimiento esperado es cero, y sería la tradicional.
2. Condicional, donde el rendimiento esperado será condicional.

Dentro del “stress test” condicional destaca el trabajo de KIM y FINGER (1999), que diferencian entre activos principales ( $x$ ) y periféricos ( $y$ ). De manera que la distribución de sus rentabilidades en conjunto es una mixtura de normales:

$$(x, y) \cong \begin{cases} \left[ (\mu_x \quad \mu_y); \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_y^2 \end{pmatrix} \right] \rightarrow \text{prob.} = w \\ \left[ (\mu_x^* \quad \mu_y^*); \begin{pmatrix} \sigma_x^{*2} & \sigma_{xy}^* \\ \sigma_{yx}^* & \sigma_y^{*2} \end{pmatrix} \right] \rightarrow \text{prob.} = 1 - w \end{cases}$$

Donde (\*) indicará momentos de fuerte agitación o “stress”, y su ausencia lo opuesto, de tal forma que los activos principales son más volátiles, es decir:

$$\sigma_x^2 < \sigma_x^{*2}$$

Para estimar esta mixtura, primero calculan la distribución normal de x, y a continuación determina la mixtura por máxima verosimilitud.

Posteriormente, estiman la probabilidad condicional ( $\alpha$ ) de que los activos x sean “stress” en un instante t, tras haberlo sido en el instante anterior, así siguiendo la norma de Bayes:

$$\alpha_t = \frac{(1-w) \cdot N(x_t | (\mu_x^*, \sigma_x^{*2}))}{w \cdot N(x_t | (\mu_x, \sigma_x^2)) + (1-w) \cdot N(x_t | (\mu_x^*, \sigma_x^{*2}))}$$

**De tal forma que la probabilidad de que fuese día tranquilo será (1- $\alpha$ ).**

Tras estimar las probabilidades condicionales ( $\alpha$ ), a partir de las incondicionales (w), pueden calcularse las correlaciones entre activos principales y periféricos:

$$\rho_{xy}^* = \frac{\sum_{t=1}^N \alpha_t \cdot (x_t - \mu_x^*) \cdot (y_t - \mu_y^*)}{\sigma_x^* \cdot \sigma_y^* \cdot \sum_{t=1}^N \alpha_t}$$

Y la correlación en épocas de escasa agitación será:

$$\rho_{xy} = \frac{\sum_{t=1}^N (1-\alpha_t) \cdot (x_t - \mu_x) \cdot (y_t - \mu_y)}{\sigma_x \cdot \sigma_y \cdot \sum_{t=1}^N (1-\alpha_t)}$$

Con lo que a partir de aquí la distribución normal condicional de los activos periféricos sería:

$$(y_t | x_t) \cong \begin{cases} (\mu_{y_t} \quad \sigma_{y_t}^2) \rightarrow \text{prob.} = 1 - \alpha_t \\ (\mu_{y_t}^* \quad \sigma_{y_t}^{*2}) \rightarrow \text{prob.} = \alpha_t \end{cases}$$

Donde:

$$\begin{aligned}\mu_{y_t} &= \rho_{xy} \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y} \cdot (x - \mu_x) + \mu_y \\ \mu_{y_t}^* &= \rho_{xy}^* \cdot \frac{\sigma_x^*}{\sigma_y^*} \cdot (x - \mu_x^*) + \mu_y^* \\ \sigma_{y_t}^2 &= \sigma_y^2 \cdot (1 - \rho_{xy}^2) \\ \sigma_{y_t}^{*2} &= \sigma_y^{*2} \cdot (1 - \rho_{xy}^{*2})\end{aligned}$$

Para realizar el análisis de “stress test”, expresan la rentabilidad de los activos periféricos a través de una regresión lineal de los activos principales:

$$\frac{y_t - \mu_y}{\sigma_y} = \rho_{xy} \cdot \frac{x_t - \mu_x}{\sigma_x} + \left[ (1 - \rho_{xy}^2) \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \varepsilon_t$$

Donde  $\varepsilon$  es el error de la regresión que se distribuye como una  $N(0, 1)$ . Y por tanto el “stress test” se realizaría sobre:

$$E(y_t | x_t) = \mu_y - \frac{\rho_{xy} \cdot \sigma_y}{\sigma_x} \cdot \mu_x + \frac{\rho_{xy} \cdot \sigma_y}{\sigma_x} \cdot x_t$$

Por su parte KUPIEC (1998) define dos técnicas de “stress” condicional:

$$\begin{aligned}\text{Stress - VaR}(\alpha) &= x_{2,t} \cdot R_2 + x_{1,t} \cdot \sum_{12} \sum_{22}^{-1} R_2 - \alpha \cdot \left[ x_{1,t} \cdot \left( \sum_{11} - \sum_{12} \sum_{22}^{-1} \sum_{21} \right) \cdot x_{1,t}^T \right]^{\frac{1}{2}} \\ E(\text{Stress - VaR}) &= x_{2,t} \cdot R_2 + x_{1,t} \cdot \sum_{12} \sum_{22}^{-1} R_2\end{aligned}$$

Donde  $x$  es la inversión en cada factor, y además:

$$\begin{aligned}R_2 &\approx N(0, \sum_{22}) \\ R_1 &\approx N(\mu_C; \sum_C) \\ \mu_C &= \sum_{12} \sum_{22}^{-1} \cdot R_2 = \beta \cdot R_2 \\ \sum_C &= \sum_{11} - \sum_{12} \sum_{22}^{-1} \sum_{21}\end{aligned}$$

Por tanto, considera un factor como condicional del otro. De tal manera que identifica movimientos históricos superiores al 99%, en concreto mayores de 2,33 veces la desviación estándar, y luego, para los dos conjuntos de activos, define la matriz de covarianzas como:

$$\sum_t = D_t \cdot C_t \cdot D_t^T = \begin{pmatrix} \sum_{11} & \sum_{12} \\ \sum_{21} & \sum_{22} \end{pmatrix}$$

Donde D es una matriz diagonal de las desviaciones y C de las correlaciones, entonces pueden simularse dos situaciones:

- Variación de las volatilidades.

$$\sum_{t,D} = (D_t + \Delta D) \cdot C_t \cdot (D_t + \Delta D)^T$$

- Variación de las correlaciones.

$$\sum_{t,C} = D_t \cdot (C_t + \Delta C) \cdot D_t^T$$

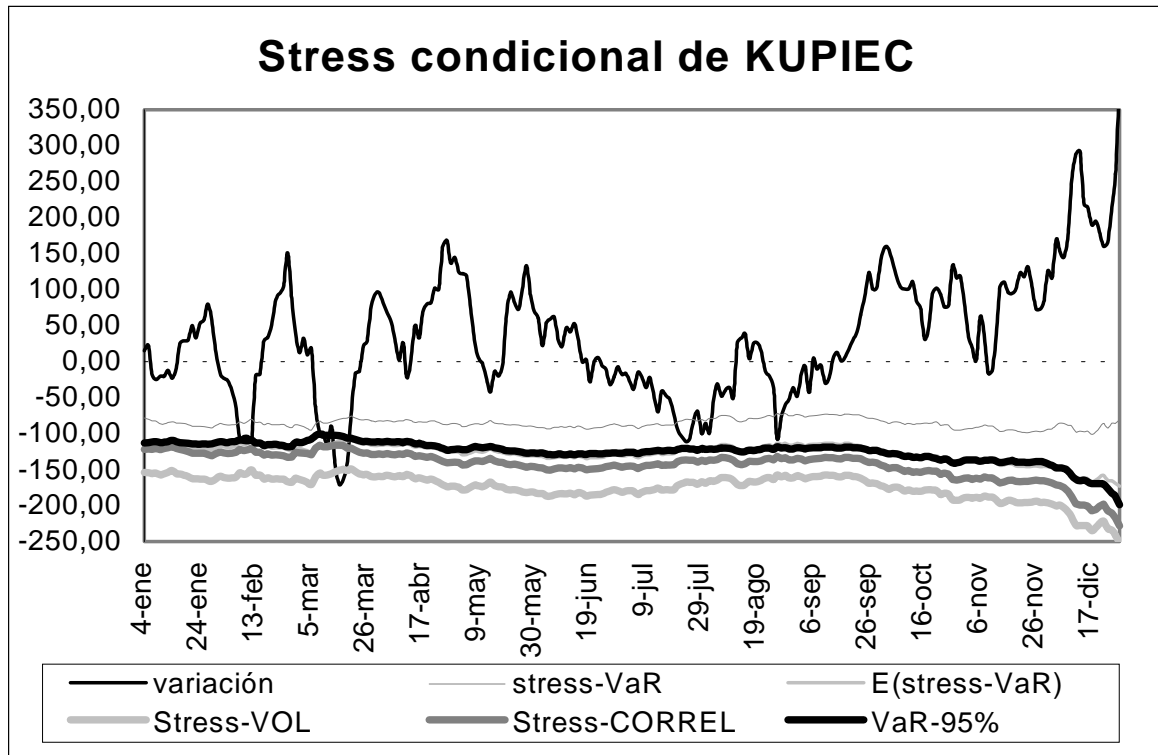
El problema de la segunda posibilidad es que la matriz de covarianzas deje de ser definida positiva, por ello se recurre a:

$$C^* = k \cdot C_t + (1-k) \cdot (C_t + \Delta C)$$

$$k \in (0,1)$$

Donde k será el menor valor para el que todos los valores equivalentes sean positivos, ya que si alguno fuese cero, entonces la variación del precio del factor correspondiente se explicaría totalmente por el resto de factores. Lógicamente, si la cartera incorporase opciones una forma de realizar estos cálculos sería la simulación de Monte Carlo.

Hemos aplicado el “stress” condicional de Kupiec sobre una cartera compuesta por Unión Fenosa (condicional) e Iberdrola (independiente). Estimando el riesgo para un nivel del 95%, asimismo, para estimar el “stress-VaR” y el “esperado stress-VaR” hemos supuesto una variación del 10% del precio de Iberdrola, para simular el efecto de la volatilidad hemos considerado una volatilidad anualizada del 30%, y para el supuesto de la correlación la hemos tomado como 80%, con un valor de  $k=0,5$ . Los resultados junto al VaR y la variación del precio de la cartera han sido:



Como se comprueba, las técnicas de “stress” ayudan a mejorar la fiabilidad de la estimación, una nueva idea que surge, en consonancia con esto, es la integración del “stress test” y el VaR. Matemáticamente la distribución de probabilidad empleada en el “stress” ( $f_s$ ) es diferente de la usada para estimar el VaR ( $f$ ), así pues, el “stress” puede definirse como el modelo que genera una distribución probable de los resultados a partir de un modelo de valoración y una distribución  $f_s$ . Esta definición implica:

- Que los modelos de precio empleados en el “stress test” son iguales a los usados en la determinación del VaR, y que no se probarán.
- El VaR se apoya sólo en observaciones históricas, el “stress” además en las posibles situaciones que no han tenido lugar antes.
- Dado que  $f_s$  es una deformación de  $f$ , cabe la posibilidad de combinar el VaR y el “stress test” en un solo modelo.

El problema que se deriva del último punto es que la combinación no puede ser lineal, y por tanto, cualquier técnica de “stress test” ( $f_s$ ) no es válida, si no toma en consideración  $f$ . Además, el “stress test” debe llevar asignada una probabilidad de ocurrencia, pues de nada sirve descubrir la situación crítica que llevaría a la entidad a la bancarrota, si la probabilidad de que tenga lugar es prácticamente nula.

La propuesta que formula al respecto BERKOWITZ (1999b) es definir la distribución que combine VaR y “stress test” ( $f_c$ ):

$$fc = \begin{cases} f \rightarrow \text{prob.} = 1 - \alpha \\ fs \rightarrow \text{prob.} = \alpha \end{cases}$$

Así por ejemplo, simulando una variable uniforme  $U(0, 1)$ , entonces:

$$fc = \begin{cases} \text{Si } U \leq 1 - \alpha \rightarrow fc = f \\ \text{Si } U > 1 - \alpha \rightarrow fc = fs \end{cases}$$

Si existiese más de un escenario resultaría:

$$fc = \begin{cases} f \rightarrow \text{prob.} = 1 - \sum_{i=1}^n \alpha_i \\ fs(1) \rightarrow \text{prob.} = \alpha_1 \\ \vdots \\ fs(n) \rightarrow \text{prob.} = \alpha_n \end{cases}$$

Donde:

$$fc = \begin{cases} \text{Si } U \leq 1 - \sum_{i=1}^n \alpha_i \rightarrow fc = f \\ \text{Si } U \in \left[ 1 - \sum_{i=1}^n \alpha_i ; 1 - \sum_{i=1}^n \alpha_i + \alpha_1 \right] \rightarrow fc = fs(1) \\ \text{Si } U \in \left[ 1 - \sum_{i=1}^n \alpha_i + \alpha_1 ; 1 - \sum_{i=1}^n \alpha_i + \alpha_1 + \alpha_2 \right] \rightarrow fc = fs(2) \\ \vdots \end{cases}$$

Un problema añadido es que  $\alpha$  no es constante en el tiempo, así:

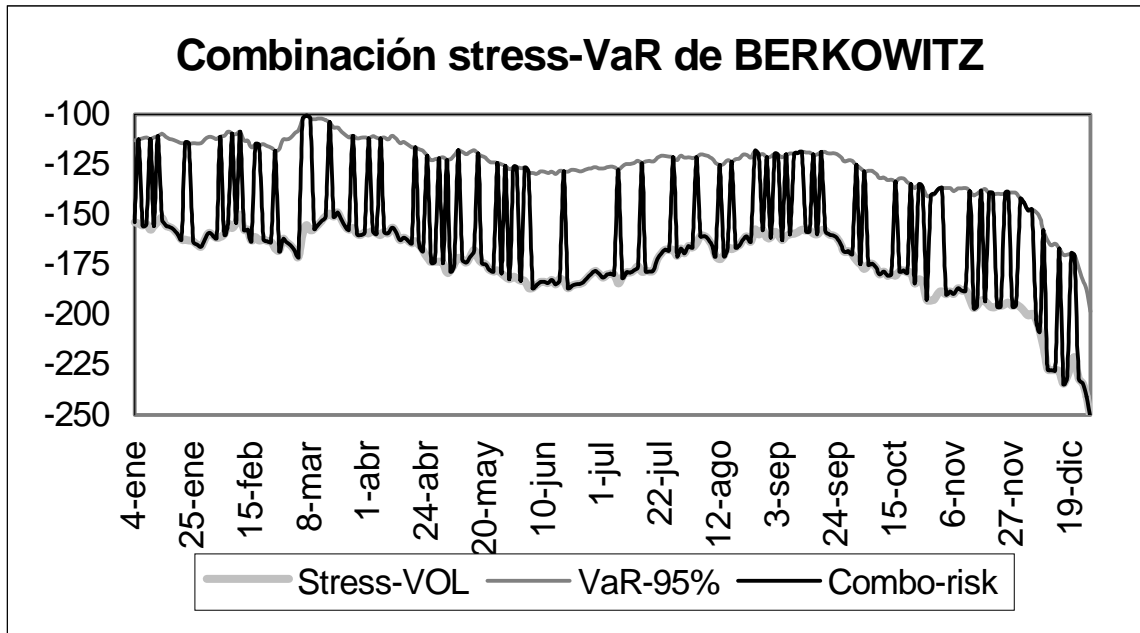
$$\alpha_t = \mu_\alpha + k \cdot (x_{t-1} - \mu_x) + \varepsilon_t$$

Y para garantizar que  $\alpha$  pertenezca al intervalo  $(0,1)$ , como toda probabilidad, se transforma en “logit” o “probit”, así:

$$\alpha_t = \frac{e^{\mu_\alpha + k \cdot (x_{t-1} - \mu_x)}}{1 + e^{\mu_\alpha + k \cdot (x_{t-1} - \mu_x)}}$$

Donde  $\mu_\alpha$  es la probabilidad media, y  $k$  la persistencia, que podrían ser fijados subjetivamente o estimados sobre datos históricos, o incluso simular la probabilidad para diferentes valores de ambos parámetros.

Si sobre la misma cartera que aplicamos el “stress” de KUPIEC aplicamos ahora la propuesta de BERKOWITZ, tomando como fs el “stress” de volatilidad del primero, y suponiendo una probabilidad constante de  $\alpha=0.7$ , resulta:



#### ✓ *Análisis de SENSIBILIDAD*

Estas técnicas permiten determinar la variación del nivel de riesgo ante modificaciones en la cartera, puesto que resulta fundamental identificar la aportación de una posición al riesgo global de la empresa, o bien el riesgo que añadiría una nueva posición.

Dentro de ellas destaca el concepto Del-VaR o delta del VaR acuñado por el profesor GARMAN(1997a, b, c)<sup>4</sup>. Este indicador representa una relación similar a la existente entre la prima de una opción y su delta, así pues, representaría la sensibilidad de la posición global de la empresa pero en términos de riesgo.

Para estimarla parte de la matriz de covarianzas  $M$  ( $n \times n$ ), del vector de flujos de caja  $F$  ( $n \times 1$ ) y de su traspuesto ( $1 \times n$ ), de manera que:

$$\text{VaR} = \sqrt{F' \cdot M \cdot F}$$

<sup>4</sup> GARMAN establece que todo método de estimación del VaR de forma diversificada ha de cumplir unos requisitos:

- Que la suma del valor de los elementos sea igual al valor de la cartera, y que la suma del VaR de los elementos sea igual al VaR de la cartera.
- En caso de deshacer una posición, el método debería permitir estimar en qué medida ha disminuido el VaR de la cartera.
- El valor de los elementos de cobertura deberá ser negativo.

Siendo su Del-VaR:

$$\text{Del - VaR} = \frac{M \cdot F}{\sqrt{F' \cdot M \cdot F}}$$

Así una nueva posición cualquiera con un vector de flujos de caja  $k$  supondría un incremento del riesgo global de forma aproximada igual a:

$$\text{Incremento - VaR} = k' \cdot \text{Del - VaR}$$

El profesor GARMAN llega a esta expresión tras comprobar que el VaR puede considerarse como la suma de la aportación al riesgo total de cada una de las posiciones individuales que componen la cartera global en términos de delta, de manera que dicha aportación en términos relativos y porcentuales puede denominarse como:

$$\text{VaR -}\beta_i = \frac{f'_i \cdot \text{Del - VaR}}{\text{VaR}} = \frac{f'_i \cdot M \cdot F}{\sqrt{F' \cdot M \cdot F}}$$

Donde  $f$  representaría el vector de flujos de caja de cada posición  $i$ .

Las propiedades del VaR-Beta son:

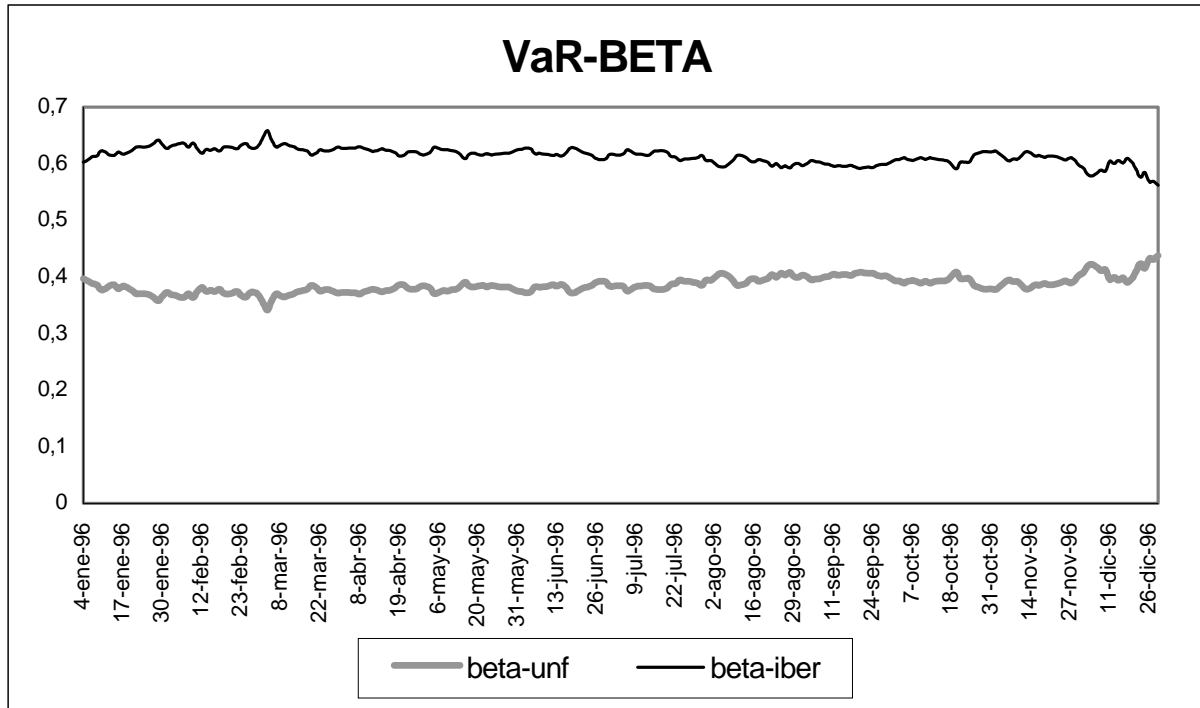
1. La suma del VaR-Beta de dos activos es igual al VaR de la cartera compuesta por ambos activos:

$$\text{VaR -}\beta_{i+h} = \text{VaR -}\beta_i + \text{VaR -}\beta_h$$

2. La suma de todos los VaR-Beta de una cartera es igual a 1.
3. Puede estimarse a diferentes niveles: entidad, unidades, operadores, áreas geográficas, actividades, etc. Por tanto, es importante diferenciar la beta de una cartera de mercado de la VaR-beta, puesto que la segunda permite presentar, a diferencia de la primera, la sensibilidad (en riesgo) para diferentes unidades de medida, esto es, por mesas de tesorería, filiales, contratos, factores de riesgo, divisas, etc.

Suponiendo que una cartera se compone de un título de Unión Fenosa y otro de Iberdrola, para 1996, el VaR-Beta, estimando el VaR con un nivel de confianza del 95%, un horizonte temporal de 10 días y por el método de las matrices de covarianzas, resultaría:





Una propuesta similar es la efectuada por DOWD (1998), cuando estima el “INCREMENTAL VaR” (IVaR) de una cartera, como consecuencia de incluir o excluir un determinado activo (A) en una proporción (a):

$$\text{IVaR} = \text{VaR}_{\text{Nuevo}} - \text{VaR}_{\text{Antiguo}}$$

De esta manera, resulta que:

$$\sigma_{\text{Nueva}} = \left[ \sigma_{\text{Cartera}}^2 + a^2 \cdot \sigma_A^2 + 2 \cdot a \cdot \sigma_{\text{Cartera,A}} \right]^{\frac{1}{2}}$$

Y despreciando el término que representa la volatilidad del activo A, obtiene:

$$\text{VaR}_{\text{Nueva}} \cong \left[ \text{VaR}_{\text{Cartera}}^2 + 2 \cdot \alpha^2 \cdot a \cdot \sigma_{\text{Cartera,A}} \cdot V_{\text{Cartera+A}}^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

Al desarrollar esta expresión llega a:

$$\text{IVaR} \cong \frac{a \cdot \alpha^2 \cdot \sigma_{\text{Cartera,A}} \cdot V_{\text{Cartera+A}}^2}{\text{VaR}_{\text{Cartera}}} = a \cdot \beta_{\text{A,Cartera}} \cdot \text{VaR}_{\text{Cartera}}$$

Finalmente, fija el intervalo de confianza de la estimación como:

$$a \cdot \text{VaR}_{\text{Cartera}} \cdot \beta_{\text{A,Cartera}} \cdot \left[ \pm t \cdot e(\beta_{\text{A,Cartera}}) \right]$$

Donde BETA sería la estimada con datos históricos como el coeficiente que relaciona, en una regresión lineal, la rentabilidad de la cartera y la del activo A; e representaría el error estándar de dicha estimación; t sería el valor de la t-student que corresponde a un nivel de confianza elegido con un número de grados de libertad igual a la diferencia entre el número de observaciones y el de los parámetros estimados.

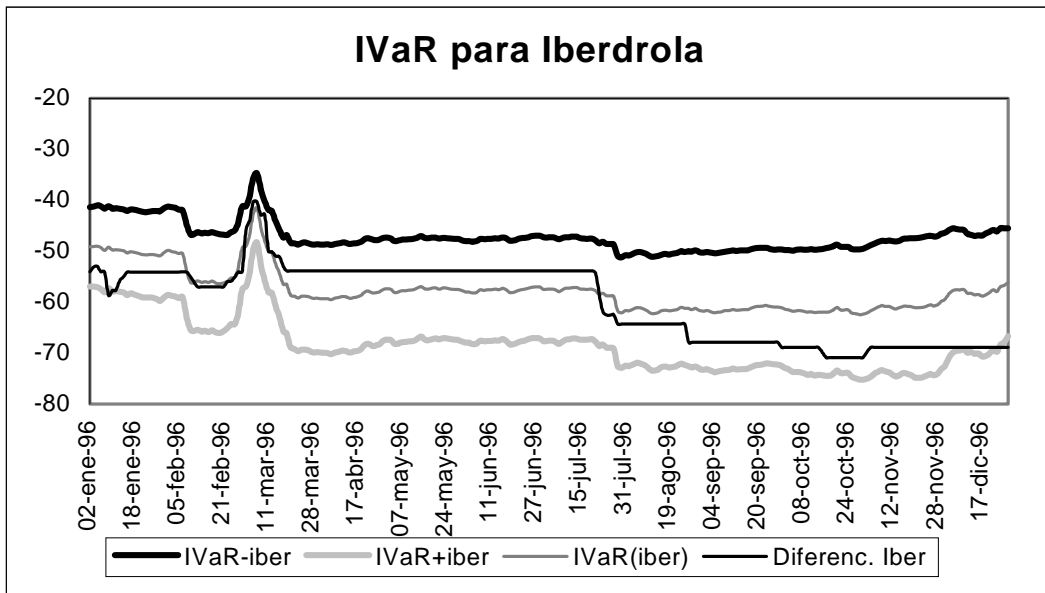
Un ajuste mejor puede lograrse a través de:

$$\begin{aligned} \text{IVaR} &= \text{VaR}_{\text{Nuevo}} - \text{VaR}_{\text{Antiguo}} \Rightarrow \frac{\text{IVaR}}{\text{VaR}_{\text{Antiguo}}} = \frac{\text{VaR}_{\text{Nuevo}}}{\text{VaR}_{\text{Antiguo}}} - 1 = \\ &= \left( \frac{\text{VaR}_{\text{Antiguo}}^2 + \text{VaR}_A^2 + 2 \cdot \rho_{\text{cartera,A}} \cdot \text{VaR}_{\text{Antiguo}} \cdot \text{VaR}_A}{\text{VaR}_{\text{Antiguo}}^2} \right)^{0.5} - 1 = \\ &= \left( 1 + 2 \cdot \frac{A}{V_{\text{Antiguo}}} \cdot \frac{\sigma_{\text{Antiguo,A}}}{\sigma_{\text{Antiguo}}^2} + \frac{\text{VaR}_A^2}{\text{VaR}_{\text{Antiguo}}^2} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \end{aligned}$$

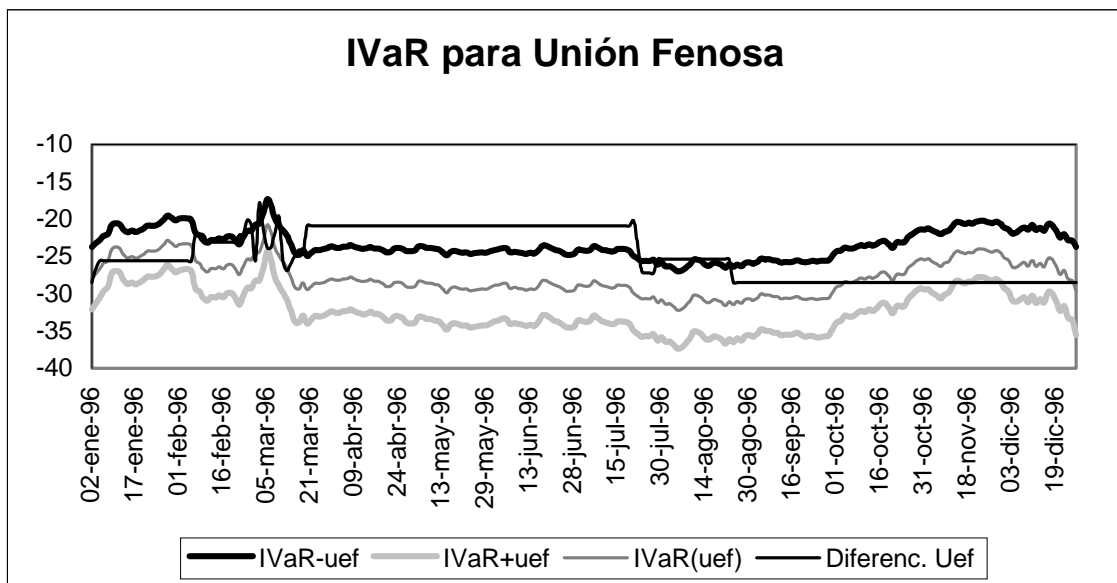
Entonces el IVaR sería:

$$\text{IVaR} = \left[ \left( 1 + 2 \cdot \frac{A}{V_{\text{Antiguo}}} \cdot \beta + \frac{\text{VaR}_A^2}{\text{VaR}_{\text{Antiguo}}^2} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right] \cdot \text{VaR}_{\text{Antiguo}}$$

Si probamos esta nueva aproximación sobre una cartera compuesta por un título de Unión Fenosa (unf) siendo una acción de Iberdrola (iber) la posición que se pretende incorporar. Para ello estimamos el riesgo por simulación histórica con un nivel de confianza del 95%, para la cartera inicial (sólo unf) y la final (unf + iber), determinamos la diferencia (diferenc.), y fijamos el intervalo de confianza de beta en el 99%, los resultados son:



Y si hacemos lo mismo pero considerando que la cartera inicial es Iberdrola y el título a incorporar es el de Unión Fenosa, resulta:



Como puede comprobarse en ambos casos existe un fallo de aproximación que podría mejorarse aumentando el intervalo de confianza de beta, en cualquier caso, este análisis de sensibilidad presenta la ventaja de su fácil estimación.

✓ *Aproximaciones MECÁNICAS*

En estas técnicas los escenarios se generan dentro de un rango de posibles valores previamente acotado, lógicamente este análisis frente al anterior gana en objetividad pero pierde en flexibilidad. Destacan por ejemplo técnicas como la Optimización de la Pérdida Máxima, Aproximación del Valor Extremo y Análisis del “Worst Case”.

El “WORST CASE”<sup>5</sup> o prueba en el peor de los casos, esto es, cuantificación de las pérdidas que sufriría la entidad en el supuesto de que se diese el intervalo de probabilidad desestimado, es decir, suponiendo que se trabaja con un nivel de confianza del 95%, y tuviese lugar el otro 5%. No debe olvidarse, que la probabilidad de ocurrencia de un suceso que quede fuera de un intervalo de confianza, asumiendo una distribución normal, vendrá dada por la expresión:

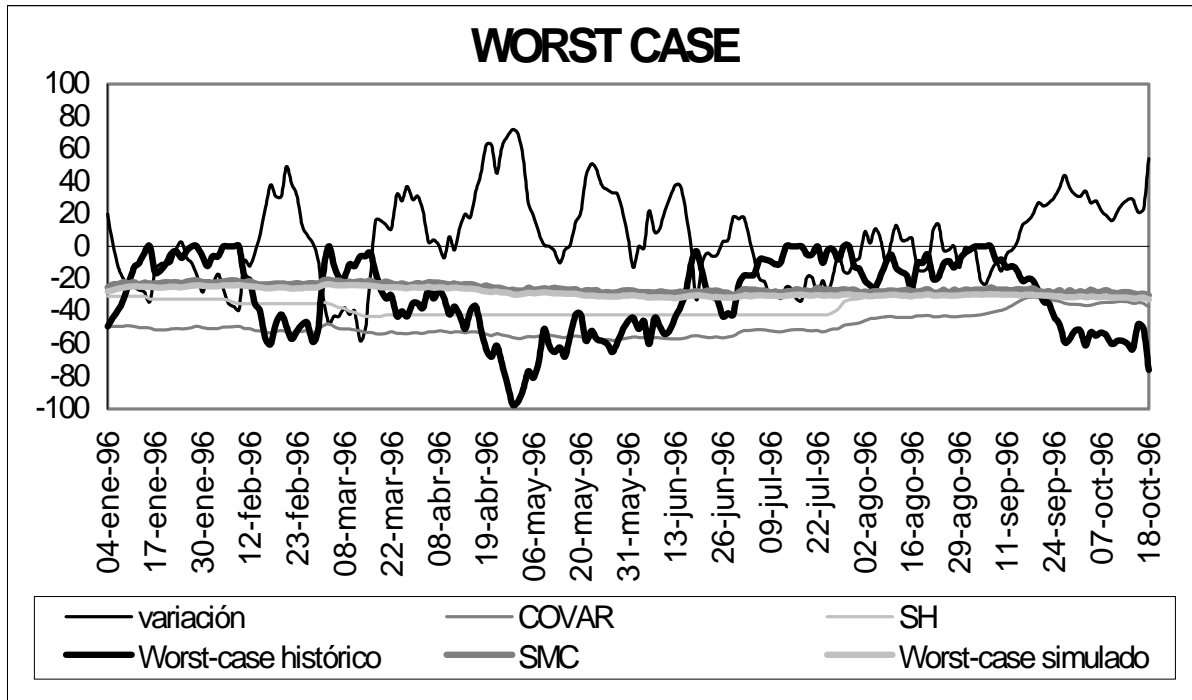
$$F(1 - x) = 2 \cdot [100\% - P\%]$$

Donde P será la probabilidad que defina el intervalo de confianza, y la justificación de que sea el doble, vendrá dada por el hecho de que este tipo de distribución es simétrica respecto del valor medio, con lo que podrá ocurrir que el suceso sea inferior o superior al estimado, pero como a efectos de nuestro trabajo sólo nos interesa que el movimiento resultase superior al esperado (“worst case”), realmente, la probabilidad de ocurrencia de este hecho será la mitad, en nuestro ejemplo anterior, del 5%.

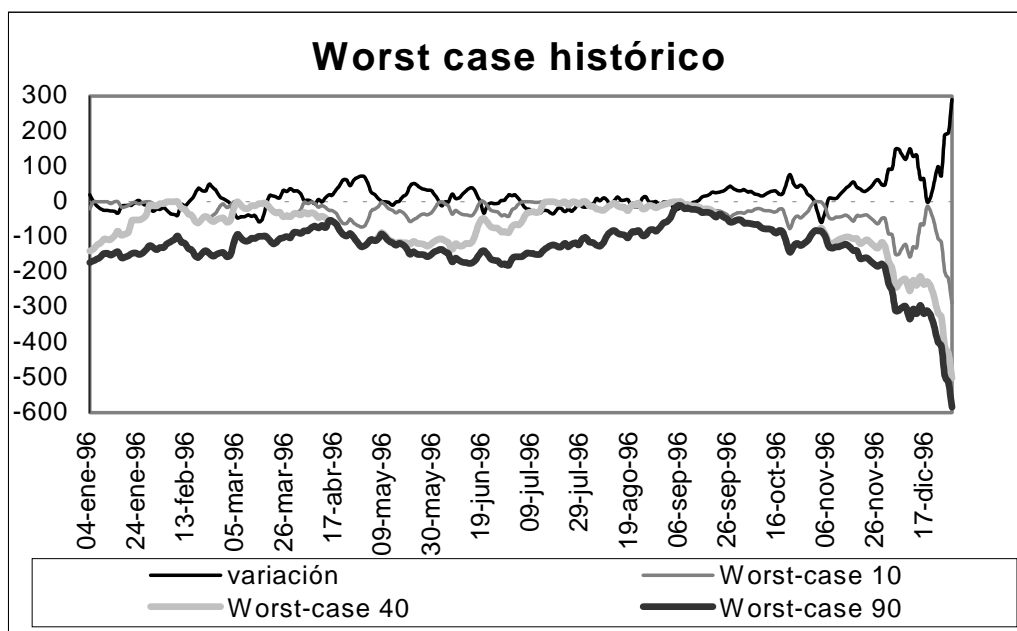
Si para una cartera compuesta por un título de Unión Fenosa estimamos el riesgo por simulación histórica (SH), matriz de covarianzas (COV) y simulación de Montecarlo (SMC), con un nivel de confianza del 95% y un horizonte temporal de 10 días, y comparamos el resultado con el peor de los casos en cada ocasión, obtenemos:

---

<sup>5</sup> Sobre esta técnica destaca la propuesta de algunos autores sobre la necesidad de estudiar la distribución de la pérdida máxima.



Como comprobamos el “worst-case” sobre datos históricos, que se ha estimado sobre las últimas 20 observaciones es muy volátil, y en cuanto al simulado su optimización dependerá del número de simulaciones. Así pues, en conclusión, la bondad de este análisis dependerá de fijar previamente un número correcto de datos históricos sobre los que determinar el “worst case”, y un número acertado de simulaciones. A modo de ejemplo presentamos el “worst case” histórico para las 10, 40 y 90 últimas observaciones:



De esta última estimación podemos extraer una serie de conclusiones:

- Cuánto menor es la base histórica empleada para determinar el “worst case” más acompasado es el movimiento de este y la variación del precio de la cartera. Por el contrario, a mayor base puede generar una ociosidad de los recursos propios.
- Por tanto, y para evitar lo anterior, cuando la volatilidad del precio de la cartera sea mínima, con la intención de evitar que la estimación sea deficitaria, habrá que aumentar la base histórica sobre la que se estima el “worst case”. En cambio, cuando la volatilidad del precio sea alta, deberá reducirse dicha base, puesto que así se recogerá el efecto del corto plazo, sin necesidad de que se tengan recursos propios ociosos.

Otro trabajo sobre peor caso es el de DEWOODY, GURURAJ y MARTIN (1999); así si dentro de una población total se extrae una muestra de tamaño  $N$ , la cuestión sería saber cuál es la probabilidad ( $p$ ) de que existan situaciones críticas en un número superior al esperado ( $n$ ). El problema consistiría en hallar una distribución de dos variable ( $n, p$ ), definida como:

$$F = \binom{N}{n} \cdot p^n \cdot (1-p)^{N-n}$$

De forma que:

$$0 \leq n \leq N$$

$$0 \leq p \leq 1$$

$$F \geq 0$$

Además la probabilidad acumulada total deberá ser 1, luego:

$$F = \int_0^1 \sum_{n=0}^N F(n,p) \cdot dp = 1$$

Por otro lado, la distribución condicional de  $p$  cuando en la muestra de tamaño  $N$  no existen casos de pérdidas es:

$$F = F(p|n = 0) = (N + 1) \cdot (1 - p)^N$$

De manera que para un nivel de confianza determinado ( $\alpha$ ), la cuestión será estimar el nivel  $x$  que represente el área exenta de eventos extremos para dicho nivel de confianza:

$$\int_0^x F(p) \cdot dp = \alpha \rightarrow x = 1 - (1 - \alpha)^{\frac{1}{N+1}}$$

Estimado  $x$  para una muestra sin eventos extremos, se procedería a estimar para otro de igual tamaño  $N$  pero con eventos, y para un nivel de confianza  $\beta$ , con lo que:

$$\sum_{k=0}^n \int_0^x \binom{N}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{N-k} \cdot dp \geq \beta$$

Donde  $n$  representa el riesgo, es decir, el menor valor de  $k$  para el que se supera el nivel de confianza.

Realizando estos cálculos cuando  $N$  tiende a infinito se obtiene:

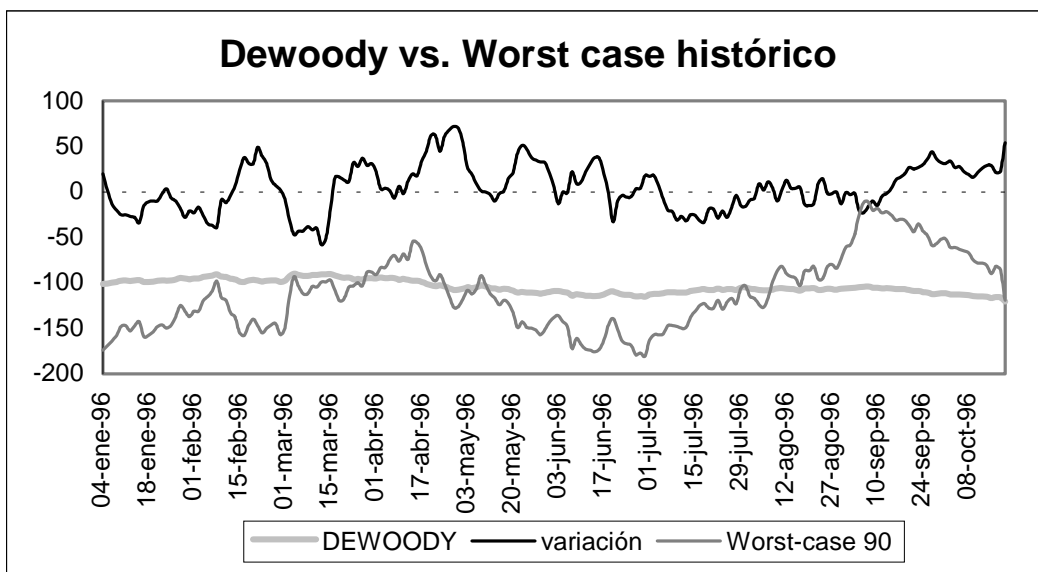
$$F_k = -\frac{[-\ln(1-\alpha)]^{k-1} \cdot (1-\alpha)}{k!} + F_{k-1}$$

$$F_0 = -\frac{\alpha}{\ln(1-\alpha)}$$

Con lo que el riesgo será el menor valor de  $k$  para el que:

$$\sum_{k=0}^n F_k > \beta$$

Para comprobar la eficiencia de este método lo comparamos con el “worst case” de los últimos 90 datos, esto es, estimamos este indicador para un valor de  $N$  igual a 90, considerando un nivel de confianza del VaR del 95% ( $\alpha$ ), y un nivel de confianza del indicador del 99% ( $\beta$ ), de manera que los resultados para un título de Unión Fenosa fueron los siguientes:



Una conclusión que podemos extraer de todo lo anterior es que la base de datos histórica empleada no es una garantía de eficiencia en la estimación, lo cual nos conduce a la necesidad de ponderar de alguna forma dichas observaciones, surge así el “worst case” histórico ponderado, esto es, para cada intervalo temporal igual al horizonte de medición de riesgo se tomará el peor resultado, se agruparán en bases de 90 observaciones y se ponderarán inversamente al período transcurrido desde el momento en que tuvieron lugar, posteriormente se construye un histograma de los mismos, tomando como caso extremo el correspondiente al nivel de confianza elegido.

La ponderación podría ser:

$$W_{t-k+1} = \frac{1-\lambda}{1-\lambda^T} \cdot \lambda^{k-1}$$

De forma que los resultados se ordenan de manera ascendente, y el VaR para un determinado nivel de confianza se hallará acumulando las ponderaciones hasta alcanzar dicho valor. Por ejemplo, si el nivel de confianza es el 95% y lambda es 0,9, resulta:

t	resultado	w
1	5	0,15
2	2	0,14
3	-1	0,125
4	-4	0,11
5	6	0,1
6	3	0,09
7	-5	0,08
8	-3	0,075
9	-2	0,07
10	-6	0,06



Tras ordenar los resultados:

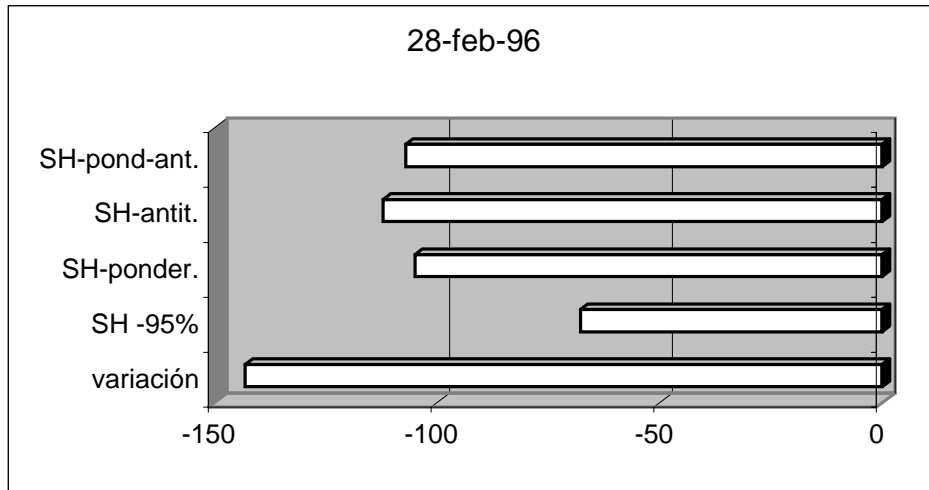
Resultado	w acumulado
6	0,1
5	0,25
3	0,34
2	0,48
-1	0,0605
-2	0,675
-3	0,75
-4	0,86
-5	0,94
-6	1

Luego el VaR para 0.95, estará entre (-5; -6), y para hallarlo se recurrirá a una interpolación, en el caso de optar por una lineal sería:

$$\text{VaR} = -6 \cdot \frac{0,95 - 0,94}{1 - 0,94} - 5 \cdot \frac{1 - 0,95}{1 - 0,94} = -5,167$$

Otra propuesta en este sentido, es la simulación histórica antitética, duplicando los datos originales pero con signo cambiado, de forma que evitan las tendencias de precios y los escalones en el VaR, y al mismo tiempo requieren una menor base histórica.

Así si aplicamos estos métodos (SH-pond., SH-antit. y SH-pond.-antit.) sobre una cartera compuesta por un título de Unión Fenosa y otro de Iberdrola en una fecha concreta de 1996, en concreto, una de las de mayor pérdida 10 días después, para un nivel de confianza del 95%, y lo comparamos con la simulación histórica tradicional (SH) al 95%, todo ello estimado sobre 90 observaciones, se obtiene:



A pesar de ser una estimación con un nivel de confianza del 95%, obtiene mejores resultados que la simple simulación histórica, de manera que un método de previsión de riesgos bastante acertado, podría consistir en estimarlo por simulación histórica al 95%, y acompañar dicha estimación con un análisis extremo mediante la simulación histórica ponderada (o/y antitética) al 99%, ya que esta presenta un menor exceso de consumo de recursos cuando el movimiento de precios es favorable a la posición.

Otra técnica dentro de las aproximaciones mecánicas sería la de la Pérdida Máxima Cuadrática de STUDER y LÜTHI (1996), así si  $FR_t$  es el vector de factores de riesgo en el momento  $t$  que sería una distribución multinormal tal que:

$$FR_t = (fr_{1,t}; fr_{2,t}; \dots; fr_{k,t}) \rightarrow FR_t \approx N^k(0, \Sigma_t)$$

Y a su vez  $V_t$  es el valor de la cartera que dependerá en  $t$  del valor  $FR_t$  definiéndose la máxima pérdida (MP) como:

$$MP_t = \min[V(FR_t)] \quad FR \in \lambda_t \quad \text{probab.}(\lambda_t) = \alpha$$

Con un nivel  $\alpha$  de confianza.

El significado de  $\lambda_t$  es el grado de libertad o región cierta combinada de “worst case” dentro del espacio  $FR$ , luego a diferencia del VaR,  $MP_t$  no solo depende de  $\alpha$  y de  $t$ , además lo hace de  $\lambda_t$ .

De esta manera si la función de densidad de  $FR$  se corresponde con una normal, el problema será hallar  $C\alpha$  o valor de la  $MP_t$ :

$$\text{probab.}\left(FR_t | FR_t' \Sigma_t^{-1} FR_t \leq C\alpha\right) = \alpha$$

Si se aplica la descomposición de Cholesky:

$$FR_t' \sum_t^{-1} FR_t' = FR_t' A_t^{-1} (A_t^{-1})' FR_t = [(A_t^{-1})' FR_t]' [(A_t^{-1})' FR_t]$$

De manera que se obtendrán k variables independientes y normales, o dicho de otra forma el resultado se distribuye como un  $\chi^2$  de Pearson con k grados de libertad, obteniéndose así el valor de  $C\alpha$ . Con lo que para carteras de comportamiento lineal:

$$PM_t = -C\alpha^{1/2} \cdot \left[ a_t' \sum_t a_t \right]^{1/2}$$

Donde a es el vector de sensibilidades.

Para carteras no lineales resulta más complejo, puesto que se hace preciso realizar una aproximación cuadrática. En general este método está entre el VaR y el “Stress Test”.

Otra propuesta es la de BAHAR, GOLD y POLIZU (1997), que proponen determinar el riesgo como el mínimo valor o máxima pérdida dentro de un intervalo de tiempo (desde el momento presente hasta el final de horizonte temporal) y para un determinado nivel de confianza. Así se define el “shock” hasta un momento k cualquiera como:

$$S_k = \sum_{i=1}^k e_i$$

Donde cada  $e_i$  representa el “shock” de cada instante y si además existe correlación entre movimientos de la variable, entonces:

$$\begin{aligned} e_1 &= \mu_1 \\ e_2 &= \rho \cdot e_1 + \mu_2 \\ &\dots \\ e_k &= \rho \cdot e_{k-1} + \mu_k \end{aligned}$$

Donde  $\mu_1$  es una distribución normal y el resto de  $\mu_i$  también pero de varianza  $\sigma^2=1-\rho^2$ .

A través de la simulación de Monte Carlo, teniendo en cuenta que la variable se distribuye como una normal de media cero y varianza:

$$\sigma^{*2} = \frac{1 + (k-1) \cdot (1-\rho^2)}{(1-\rho)^2}$$

Siendo k el horizonte temporal, de forma que simulando el comportamiento se obtendría:

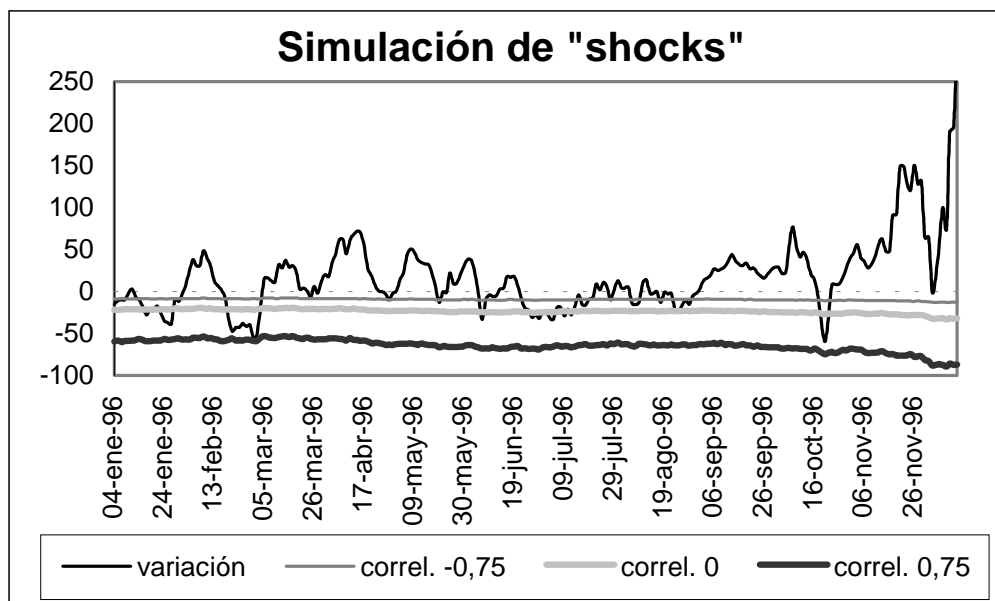
$$S_{\Delta t} = e^{\varepsilon_1 \sqrt{\Delta t} \sigma^*}$$

$$S_{2\Delta t} = e^{\varepsilon_2 \sqrt{\Delta t} \sigma^*}$$

$$\vdots$$

$$S_{n\Delta t} = e^{\varepsilon_n \sqrt{\Delta t} \sigma^*}$$

Y finalmente se tomaría el menor valor de acuerdo con el percentil elegido en función del nivel de confianza establecido. De esta forma, si aplicamos este proceso sobre el título de Unión Fenosa para 1996, para un horizonte temporal de 10 días y un nivel de confianza del 99%, al emplear diferentes correlaciones obtenemos:



Como podemos comprobar la correlación entre “shocks” es el factor clave a determinar.

Otra línea de investigación se ocupa del empleo de la teoría de valores extremos. Dentro de esta destaca como una primera aproximación el trabajo de KOEDIJK, HUISMAN y POWNALL (1998). Estos autores al comprobar que la distribución de la variación de los precios presenta colas gruesas, con lo que la estimación del VaR considerando un comportamiento normal infraestimaría el “downside”, siendo mayor el error cuanto más elevado sea el cuantil considerado, optan por emplear una distribución t-student, ya que presenta colas más gruesas que la normal, y permite además, analizar las colas por separado, es decir, puede estudiar de esta manera la asimetría. A este cambio se le denomina VaR-x, donde x representa los grados de libertad de la t-student, y que será el factor clave que permita adaptar el grosor de la cola.

Hasta ahora, dada la dificultad de estimar  $x$ , se empleaban otras distribuciones (mixtura de normales y Pareto) pero a raíz de los avances de la Teoría de Eventos Extremos, se produce un cambio. Dentro de esta teoría, centrada en el análisis de las colas, destaca el índice de la cola (IC), o velocidad con que la cola tiende a cero. Su importancia radica en que su valor es igual al número de momentos de la distribución, así para  $IC=2$ , sólo existen la media y la varianza, el resto de momentos será infinito. Para la t-student los momentos que existen coinciden con su grado de libertad, por tanto estimando IC se obtienen los grados de libertad, y por ende, el VaR-x.

Si  $k$  son las observaciones de cola (izquierda) se realiza una ordenación estadística del valor absoluto de las mismas:

$$|x_1| < |x_2| < \dots < |x_k|$$

El estimador del IC tradicional es el estimador de Hill ( $H^*$ ), pero presenta el problema de ser inconsistente con muestras pequeñas, así se modifica y se trabaja con:

$$H^* = \frac{1}{k} \cdot \sum_{i=1}^k [\ln(x_i) - \ln(x_{k+1})]$$

$$H^* = a + b \cdot x_i + \varepsilon_i$$

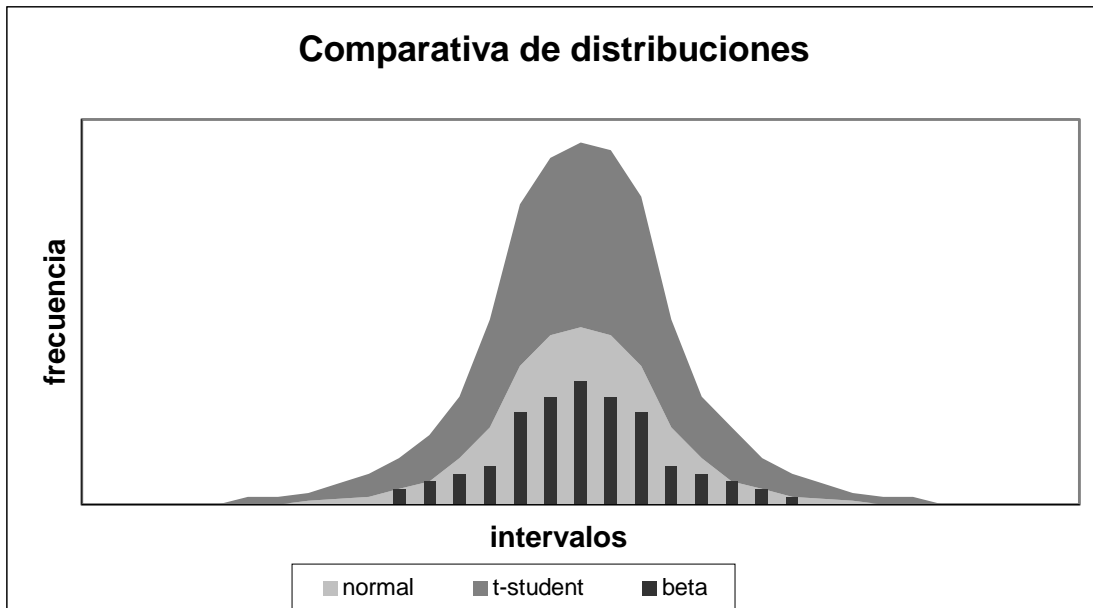
$$IC = a$$

$$\forall i = 1, \dots, k$$

Según el valor del índice de la cola (IC) resultará:

- Si  $IC > 0$ , la distribución será de colas gruesas, es decir, Pareto, Cauchy, Burr, Fréchet, t-student y loggamma.
- Si  $IC = 0$ , las colas tendrán un “decay” exponencial, así por ejemplo, la normal, lognormal, exponencial y gamma.
- Si  $IC < 0$ , la distribución será de punto final o colas cortas, así están la uniforme y la beta.

Así por ejemplo, si recogemos estas tres clases de distribuciones según el índice de la cola resulta:



Obtenido el IC debe hacerse una correcta interpretación, pues representa los grados de libertad de una distribución t-student con:

$$\mu = 0$$

$$\sigma^2 = \frac{IC}{IC - 2}$$

Evidentemente, este no es el caso de la distribución buscada, así pues habrá que adaptarla a la real. Para ello se estima:

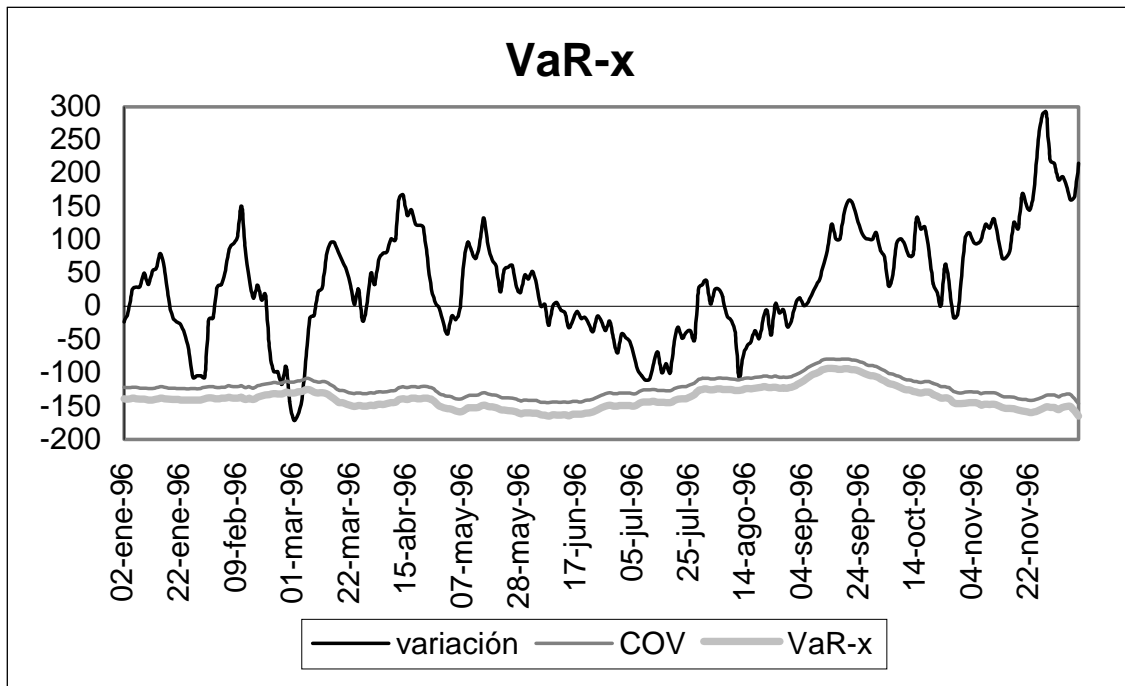
$$\lambda = \frac{v}{\left(\frac{IC}{IC - 2}\right)^{1/2}}$$

Que será el cociente entre la desviación de la muestra (v) y la correspondiente a la distribución de student obtenida. De esta forma:

$$VaR - x = V_0 \cdot \lambda \cdot t$$

Donde  $V_0$  será el valor actual de la posición y t representará el valor de t-student según el IC y el nivel de confianza.

Aplicando esta propuesta a una cartera compuesta por un título de Unión Fenosa y otro de Iberdrola para el ejercicio 1996, y con un nivel de confianza del 95% sobre un horizonte temporal de 10 días, se obtiene:



Como podemos comprobar sustituir la distribución normal por la student a pesar de generar un mayor colchón en el caso de pérdidas, tampoco parece la solución definitiva, pero sin duda alguna pone de manifiesto el problema principal, esto es, las colas de la distribución.

Para estudiar esta característica hemos de dar un paso más a la propuesta anterior, adentrándonos en la Teoría de Valores Extremos, que surge en 1903 de la mano de Lundberg, para estudiar los casos extremos, esto es, las colas de las distribuciones.

Al aplicar esta teoría en la medición del riesgo son dos los conceptos básicos que pueden emplearse:

- **MaxVaR:** representaría el máximo de las fluctuaciones de una variable próxima al extremo, y que vendría estimado a través de los excesos máximos. Así la distribución General de Valor Extremo (GVE) suele ser Fréchet, Weibull o Gumbel. Para estimarla se puede realizar una regresión entre los datos observados y los correspondientes a la distribución teórica tomada:

$$\hat{x} = \mu + \psi \cdot x$$

De manera que GVE sería:

$$\text{GVE} = \begin{cases} \text{Si } \varepsilon \neq 0 \rightarrow e^{-\left(1 + \varepsilon \cdot \frac{x - \mu}{\psi}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}} \\ \text{Si } \varepsilon = 0 \rightarrow e^{-e^{-\frac{x - \mu}{\psi}}} \end{cases}$$

Con lo que:

$$\text{Fréchet} = F\left(1 + \frac{x - \mu}{\alpha \cdot \psi}\right) \Leftrightarrow \varepsilon = \frac{1}{\alpha} > 0$$

$$\text{Weibull} = W\left[-\left(1 - \frac{x - \mu}{\alpha \cdot \psi}\right)\right] \Leftrightarrow \varepsilon = -\frac{1}{\alpha} < 0$$

$$\text{Gumbel} = G\left(\frac{x - \mu}{\psi}\right) \Leftrightarrow \varepsilon = 0$$

Donde  $\alpha$  es el grado de estabilidad de la distribución, o número de momentos que tiene dicha distribución. El percentil correspondiente al MaxVaR para un nivel de confianza  $p$  será:

$$\hat{x}_p = \hat{\mu} - \frac{\hat{\psi}}{\hat{\varepsilon}} \cdot \left\{1 - [-\ln(p)]^{-\hat{\varepsilon}}\right\}$$

- “Shortfall”: exceso medio sobre un nivel alto dado, para su modelización se emplea la distribución Generalizada de Pareto (GP):

$$\text{GP} = \begin{cases} \text{Si } \varepsilon \neq 0 \rightarrow 1 - \left(1 - \varepsilon \cdot \frac{x}{\beta}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}} \\ \text{Si } \varepsilon = 0 \rightarrow 1 - e^{-\frac{x}{\beta}} \end{cases}$$

De manera que el percentil correspondiente al “shortfall” para un nivel de confianza  $p$  será:



$$\hat{x}_p = \text{VaR} + \frac{\hat{\beta}}{\hat{\varepsilon}} \cdot \left\{ \left[ \frac{t}{N} \cdot (1-p) \right]^{-\hat{\varepsilon}} - 1 \right\}$$

Donde t es el intervalo temporal y N el número de excesos sobre el VaR.

Pero la teoría de valores extremos tampoco es la panacea, existen una serie de problemas a tener en cuenta:

- Elección del orden estadístico para estimar la cola de la distribución, es decir, a partir de qué observación se considera que comienza ésta. Así si el orden elegido es muy grande para trabajar con muchos datos, el análisis se aleja de la cola, y si el número es pequeño, aunque se reduzca la varianza, aumenta el error. Esto se ha intentado solucionar a través de una regresión no lineal entre los eventos de la cola empírica y los valores extremos observados:

$$\text{prob}(x > y) = k \cdot y^{-\alpha} \cdot (1 + c \cdot y^{-d})$$

- Otro problema es si k, en la regresión anterior, es constante o no.
- Escasez de datos en la cola para realizar el análisis.
- El cumplimiento de la autosimilaridad es otro de los inconvenientes. Este principio según se analizó permite la transformación temporal de las estimaciones según el índice de la cola:

$$V_1 \cdot T^{\frac{1}{\alpha}} \cong V_T$$

Pero en la práctica se comprueba que según el nivel inicial de la volatilidad la regla no es constante sino que se debe expresar como:

$$V_1 \cdot T^{\lambda_t} \cong V_T$$

Donde  $\lambda$  dependerá de la volatilidad, así para un nivel bajo de ésta, el nivel futuro será alto, y viceversa, puesto que existe una reversión a la media, con lo que a menor volatilidad mayor valor de  $\lambda$ , y a mayor volatilidad menor será su valor, y si la volatilidad está próxima a la media entonces:

$$\lambda_t \cong \frac{1}{\alpha}$$

- Por último, respecto a la rentabilidad de los activos surge otro inconveniente, puesto que si es condicional y heterocedástica como se comprueba hoy día, y dado que la teoría de eventos extremos considera que las variables son independientes e idénticamente distribuidas (i.i.d.), entonces no sería aplicable. Esto hace que sea fundamental el modelo de valoración elegido, puesto que si define correctamente el comportamiento de la volatilidad, los residuos serán i.i.d., de forma que podría aplicarse la teoría de valores extremos para analizar éstos, es decir, la cola.

CRUZ, COLEMAN y SALKIN (1998) también proponen trabajar con la teoría de valores extremos, puesto que la consideración normal de la distribución se aleja de la realidad. Estos autores establecen los tests que deben aplicarse para comprobar si la distribución Generalizada de Valores Extremos (GVE) obtenido es correcta. Así destaca el estadístico de Kuiper, definido como:

$$K = \max_i \left[ \frac{i}{t} - F(x_i) \right] + \max_i \left[ F(x_i) - \frac{i-1}{t} \right]$$

Donde  $F(X_i)$  es la probabilidad obtenida para cada  $X_i$  de GVE, una vez estimados los parámetros.

Para rechazar la GVE el estadístico anterior, para el nivel de confianza elegido, debería rebasar los siguientes valores:

	<b>Estadístico</b>	<b>90%</b>	<b>95%</b>	<b>97.5%</b>	<b>99%</b>
<b>t</b>					
10	$\sqrt{t} \cdot K$	1,287	1,381	1,459	1,535
12		1,301	1,399	1,476	1,558
20		1,323	1,428	1,509	1,600
50		1,344	1,428	1,538	1,639
$\infty$		1,372	1,477	1,557	1,671

### 3.2. VALIDACIÓN DEL MODELO INTERNO

Una vez que se han estudiado las diferentes posibilidades que existen para complementar la medición del riesgo realizada a través de los modelos internos, se analizan aquellas otras que pueden emplearse para establecer el error de estimación del modelo, con lo que los tres pilares básicos de pérdida probable, situaciones críticas y validación, quedarían completados.

Son tres las posibilidades que existen para evaluar un modelo interno:

- a) Estimar el error estándar: no sirve pues la volatilidad y la correlación no son constantes.
- b) “Back testing”: porcentaje de días en los que la pérdida excede de la estimada, de manera que un buen modelo nunca deberá exceder de 100 menos el nivel de confianza, es decir, para un nivel del 95%, y 100 días de prueba, no debería exceder de 5 días. A través de esta técnica también puede estimarse la eficiencia de los modelos, por ejemplo, puede compararse un VaR estimado por “mapping” con otro basado en las sensibilidades.
- c) Test de pérdidas excedidas: consiste en evaluar el modelo implantado según un estadístico previamente definido.

Con relación al “*back testing*” o *pruebas retrospectivas* hay que destacar la Directiva 98/31/CE del Parlamento Europeo y del Consejo, de 22 de junio de 1998, por la que se modifica la Directiva 93/6/CEE del Consejo sobre la adecuación del capital de las empresas de inversión y las entidades de crédito (DOCE 21/7/98), en cuyo contenido se recogen algunos aspectos relativos a la validación; así, indica que el control a posteriori se realizará cada día hábil comparando el VaR del modelo según las posiciones al cierre, y el cambio de valor al cierre de la cartera respecto al día siguiente. Este control se realizará de dos formas:

- Teórico: suponiendo que la composición de la cartera de un día a otro no varía.
- Real: con los cambios que haya tenido en la composición. En este caso se produce un problema puesto que los resultados reales recogen precios intradía, es decir, al cerrar una posición no siempre se hace al precio de cierre de la sesión, mientras que la estimación del riesgo según la metodología VaR se apoya en datos históricos de cierre. Esto de nuevo nos llevaría a estimaciones VaR bajo propuestas del tipo de GARMAN y KLASS (1997), estudiada anteriormente.

La importancia de esta técnica dentro de esta Directiva se hace mayor, cuando se fija que el riesgo estimado por el modelo se multiplicará por  $(3+N)$ , siendo N un factor adicional en función del número de días dentro de los últimos 250 días hábiles, en los que el cambio de

mercado (real o teórico) ha sido mayor que el determinado por el modelo. Así según el número de días se establece:

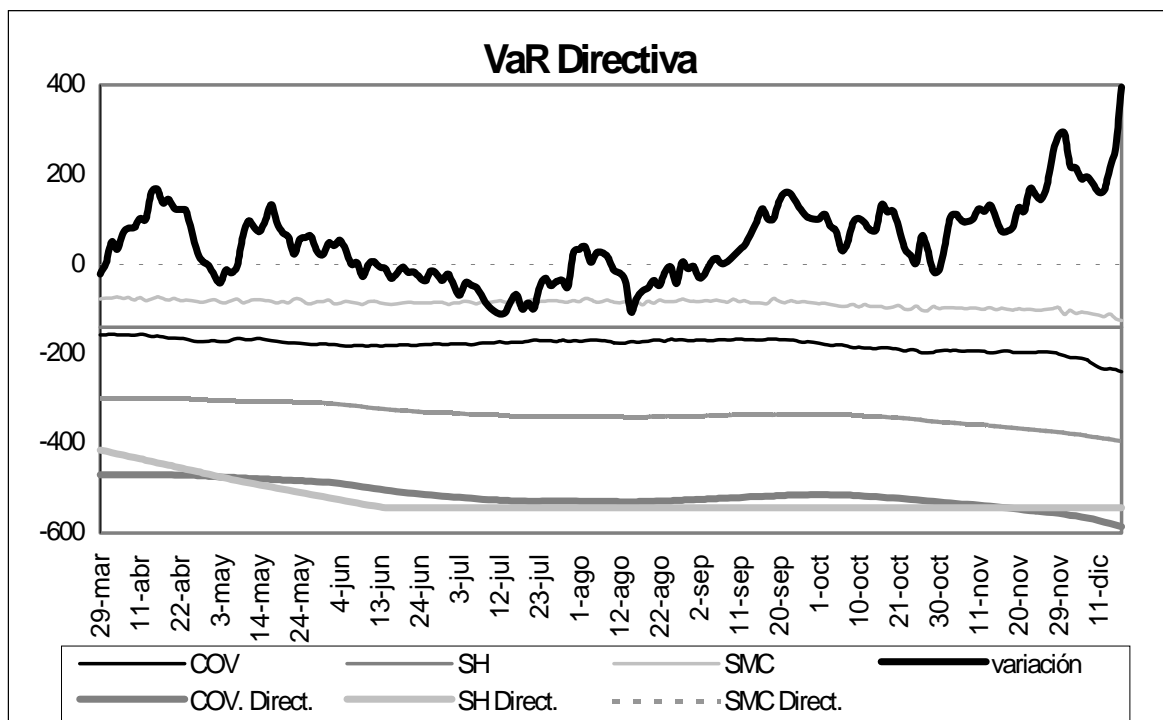
nº días de exceso	N
< 5	0
5	0,4
6	0,5
7	0,65
8	0,75
9	0,85
≥ 10	1

De esta manera el riesgo será:

$$\text{VaR}_t = \max. [\text{VaR}_{t-1}; \overline{\text{VaR}_{t,60}} \times (N + 3)]$$

Estando sujeto a cálculo diario, con un intervalo de confianza unilateral del 99%, sobre un horizonte temporal de 10 días, una base histórica de al menos 1 año, salvo que la volatilidad del mercado indique un plazo menor como más favorable, y una actualización de datos trimestral. Además, los excesos deberán comunicarse cada 5 días como máximo al supervisor.

Si esta norma la aplicamos sobre una cartera compuesta por un título de Unión Fenosa y otro de Iberdrola, empleando la simulación histórica (SH), la matriz de covarianzas (COV) y la simulación de Montecarlo (SMC), para el ejercicio 1996, resulta:



Comprobamos que bajo las condiciones de estimación de la Directiva, el mejor método es la matriz de covarianzas, pero al añadir el coeficiente corrector, resulta más ventajoso el peor

método esto es Monte Carlo (sólo 500 simulaciones), todo lo cual lleva a pensar que con el objetivo de rentabilizar los recursos propios, no interesa el método más acertado sino el que menor consumo conlleve, y en este caso, a pesar de tener un N de valor 1 (más de 10 excesos), comparativamente con el resto, la simulación de Monte Carlo consume menos recursos. Por tanto, lo ilógico de la norma es que puede conducir a decisiones irracionales respecto de las estimaciones y el mercado.

La propuesta del BIS sobre el “back testing” también recoge las dos posibilidades, esto es, cambios reales y teóricos, pero además especifica los resultados contraproducentes, de sentido opuesto, que pueden presentarse:

- \* Infraestimación: las pérdidas reales exceden del VaR estimado en más días de los que debería según el nivel de confianza, con lo cual el capital económico dispuesto para cubrir el riesgo es insuficiente.
- \* Sobreestimación: las pérdidas reales no alcanzan el VaR estimado en más días de los que debería según el nivel de confianza, de forma que el capital económico es superior al necesario, con el consiguiente efecto negativo sobre la rentabilidad.

Así pues, si estos son los dos márgenes entre los que debe moverse el resultado, entonces el intervalo de confianza será:

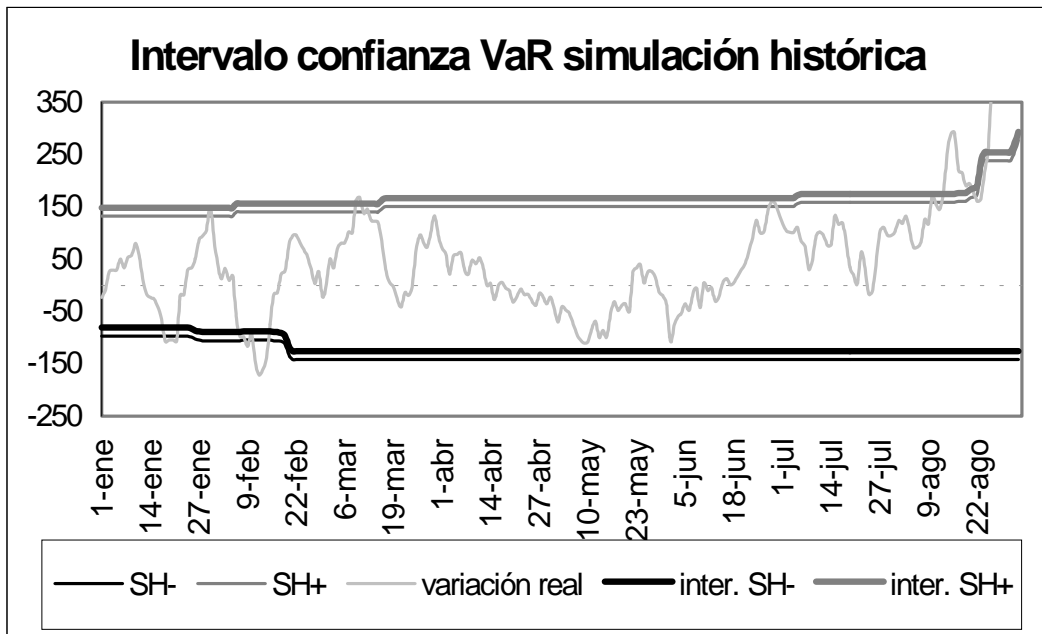
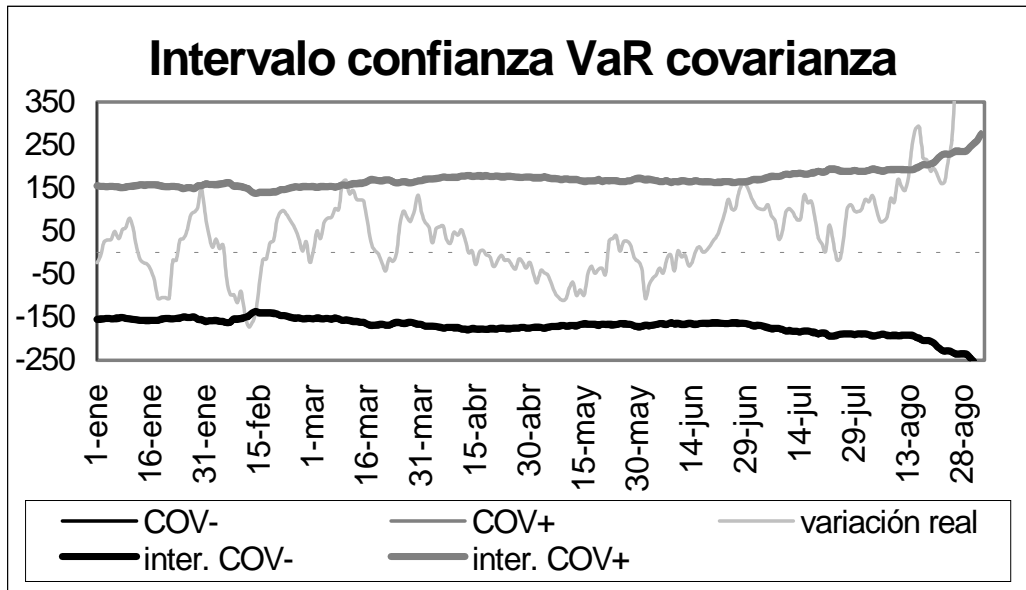
$$\text{VaR} \pm z \cdot \alpha\% \rightarrow \text{binomial}$$

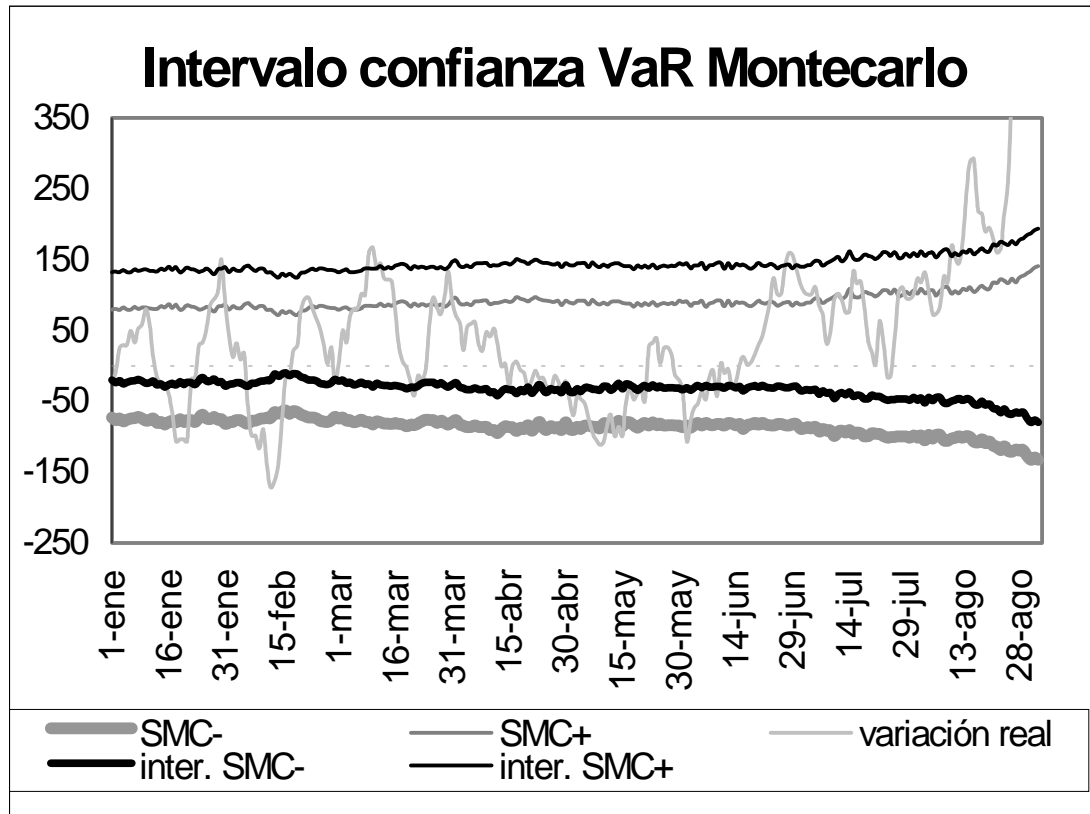
$$z = \frac{\alpha - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}$$

$$q = 1 - p$$

Donde  $\alpha$  será el número de días de exceso según el nivel de confianza con que se haya estimado el VaR, n será el número de días en los que se ha realizado el “back testing” y p será el nivel de confianza del intervalo en tantos por uno.

Si ahora estimamos los intervalos de confianza para una cartera compuesta por un título de Unión Fenosa y otro de Iberdrola, durante el año 1996, bajo las condiciones de la Directiva en lo relativo a horizonte temporal, intervalo de confianza y base histórica, estimando tanto la caída potencial como la subida potencial, es decir, el percentil 99% y el 1%, de forma que los resultados obtenidos son:





Como puede comprobarse cuanto más erróneo sea un método mayor será su intervalo de confianza, y por ende, mayor cantidad de recursos serán exigibles. Además, este sistema considera tanto los rebasamientos ante movimientos negativos como positivos, esto es, estima el valor en riesgo y el valor en beneficio, por tanto, analiza la infraestimación y la sobreestimación del cambio potencial en el precio.

Con relación a la normativa existente sobre la penalización de la estimación según los excesos, hay que destacar el trabajo de LUCAS (1998). Éste comprueba que bajo las exigencias normativas, los bancos están incentivados a emplear modelos que infraestimen el riesgo. Asimismo, determina que los parámetros que influyen son el horizonte temporal, la tasa de descuento, el ratio de Sharpe (relación rentabilidad y riesgo), y la cola de la distribución (a través de los grados de libertad de la t-student). De forma que, a menor horizonte y tasa de descuento, y mayor cola y ratio de Sharpe, el efecto de infraestimar el VaR es más pronunciado.

Por tanto, propone cambiar el modelo de penalización del BIS que vienen dado por:

ZONA	Nº EXCESOS	PENALIZACIÓN (P)
Verde	[0,4)	3
Amarilla	5	3,4
	6	3,5
	7	3,65
	8	3,75
	9	3,85
Roja	10 o más	4

Por otro paramétrico del tipo:

$$P(i) = \begin{cases} 3 \rightarrow 0 \leq i < 4 \\ P(4) + \frac{A}{1 + e^{B \cdot (i-C)}} \rightarrow 4 \leq i < 10 \\ P(9) \rightarrow 10 \leq i \end{cases}$$

Donde P es la penalización, i el número de excesos, A la penalización máxima, C el número de excesos a partir del cual la penalización aumenta, y B la velocidad con que aumenta. Teniendo en cuenta además, que P(i) aumenta gradualmente a partir de  $i=4$ , y no tiene un valor máximo de 4 sino que sería superior a medida que i aumente.

Otra forma de evaluar el modelo es el *test de las pérdidas excedidas*. Dentro de los estadísticos empleados destacan los siguientes:

- KUPIEC (1995).

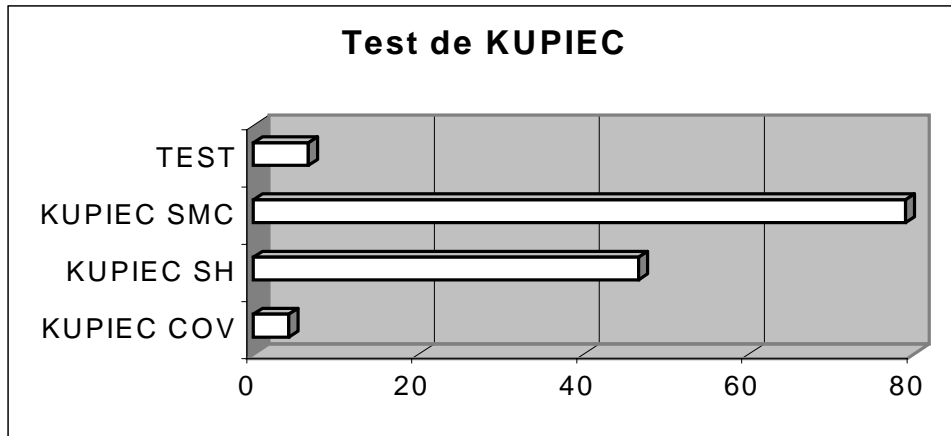
Estableció una serie de tests pues consideraba que el principal problema del “back testing” y otras estimaciones basadas en la simulación histórica, era el elevado número de observaciones que son necesarias. Uno de estos tests se aplica a los casos en los que las muestras eran pequeñas, de manera que si T es el número de veces que las pérdidas resultantes exceden del VaR estimado; N es la muestra total; c el nivel de confianza del sistema, el indicador será:

$$K = -2 \cdot \ln[(1-c)^{T-N} \cdot c^N] + 2 \cdot \ln\left[\left(1 - \frac{T}{N}\right)^{T-N} \cdot \left(\frac{T}{N}\right)^N\right]$$



que se distribuye como una de  $\chi^2$  Pearson con un grado de libertad, de manera que si el nivel resultante es igual a  $\alpha$ , el sistema es fiable.

Así por ejemplo, para la cartera compuesta por Unión Fenosa e Iberdrola, aplicamos el test de KUPIEC para los tres métodos de estimación del riesgo, sobre un período que va desde el 29 de enero de 1996 hasta el 11 de marzo del mismo año, y resultó:



Como comprobamos sólo la matriz de covarianzas superó el test para ese período.

- BERKOWITZ (1999a).

Define otro ratio como:

$$LR = -2 \cdot \left[ L_1(0,1,0) - L_2(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2, \hat{\rho}) \right]$$

Donde LR se distribuye como  $\chi^2$  con 3 grados de libertad, y cuyo valor deberá ser menor o igual que  $\alpha$ .  $L_1$  recoge la función de verosimilitud de una variable de comportamiento  $N(0, 1)$  e independientemente distribuida ( $\rho=0$ ). Por el contrario  $L_2$ , recogerá la autocorrelación y la volatilidad estocástica:

$$L_2 = -\frac{1}{2} \cdot \ln(2 \cdot \pi) - \frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{\sigma^2}{1-\rho^2}\right) - \frac{\left(z - \frac{\mu}{1-\rho}\right)^2}{\frac{2 \cdot \sigma^2}{1-\rho^2}} - \frac{T-1}{2} \cdot \ln(2 \cdot \pi) - \frac{1}{2} \cdot \ln(\sigma^2) - \sum_{t=2}^T \frac{(z_t - \mu - \rho \cdot z_{t-1})^2}{2 \cdot \sigma^2}$$

Donde:

$$z_t - \mu = \rho \cdot (z_{t-1} - \mu) + \varepsilon_t$$

Siendo  $z$  la inversa de la normal para cada observación de las pérdidas ( $y$ ).

- ENGEL y GIZYCKI (1999).

Estos autores realizan el “back testing” analizando las tres características que debe cumplir un método VaR:

- ✓ Conservadurismo.

Medido por:

$$C_i = \frac{1}{T} \cdot \sum_{t=1}^T \frac{\text{VaR}_{i,t} - \overline{\text{VaR}}_t}{\overline{\text{VaR}}_t}$$

$$\overline{\text{VaR}}_t = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N \text{VaR}_{i,t}$$

Donde  $i$  representa cada uno de los  $N$  métodos empleados.

También miden el grado de variación del conservadurismo:

$$VC_i = \left[ \frac{1}{T} \cdot \sum_{t=1}^T \left( \frac{\text{VaR}_{i,t} - \overline{\text{VaR}}_t}{\overline{\text{VaR}}_t} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

- ✓ Ajuste.

Para lo cual aplican un “back testing” a través de una distribución binomial. Además miden el exceso medio:

$$E_t = \frac{1}{M} \cdot \sum_{m=1}^M X_m$$

$$X_m = \begin{cases} \frac{\text{VaR}_{i,t}}{\text{Resultado}}; & \text{si Resultado} < 0 \\ 0; & \text{si Resultado} \geq 0 \end{cases}$$

Siendo  $i$  cada método de estimación.

Evidentemente, a mayor valor de  $E$ , mayor exceso de estimación del VaR. Este indicador también puede emplearse para los resultados positivos.

✓ Eficiencia.

Medida por la correlación con el mercado, es decir, en épocas estables el modelo no debe sobrestimar el riesgo.

▪ CRNKOVIC y DRACHMAN (1997).

Agrupan los resultados en términos de percentiles comprobando en que grado el VaR estimado es superado por las pérdidas reales. Para lo cual aplican el estadístico de KUPIER, que mide las desviaciones entre ambas funciones de distribución acumuladas. Así si la distribución observada es  $O(x)$ , y la esperada es  $E(x)$ , siendo  $x$  el cuantil, entonces:

$$\text{KUPIER} = \text{máx}[O(x) - E(x)] + \text{máx}[E(x) - O(x)]$$

El principal inconveniente es que la serie debe ser al menos de 500 datos.

▪ CHRISTOFFERSEN (1995).

Dado que en las series financieras se observa condicionalidad, CHRISTOFFERSEN propuso:

$$C = K + Z \rightarrow \chi^2_2$$

$$Z = 2 \cdot [\ln(L_A) - \ln(L_0)]$$

$$L_A = (1 - p_{01})^{T_{00}} \cdot p_{01}^{T_{01}} \cdot (1 - p_{11})^{T_{10}} \cdot p_{11}^{T_{11}}$$

$$L_0 = (1 - p)^{T_{00} + T_{10}} \cdot p^{T_{01} + T_{11}}$$

$$p_{01} = \frac{T_{01}}{T_{00} + T_{01}}$$

$$p_{11} = \frac{T_{11}}{T_{10} + T_{11}}$$

$$p = \frac{T_{01} + T_{11}}{T}$$

Siendo  $T$  la muestra total y  $T_{ij}$  sería el número de observaciones en estado  $j$  tras tener el estado  $i$  en el instante anterior. Tanto  $i$  como  $j$  sólo tendrá valor 0 o 1. Por ejemplo,  $T_{00}$  sería el número de observaciones cuyo valor es cero tras ser cero en el instante anterior. Dichos ceros y unos se definen a través de la variable  $I$ :

$$I_t = \begin{cases} 1 \rightarrow \text{exceso en } t \\ 0 \rightarrow \text{no exceso en } t \end{cases}$$

- ZANGARI (1996).

Asume el comportamiento normal de forma que el valor medio estimado y el observado de los resultados han de cumplir el t-test para un determinado nivel de confianza. El valor medio estimado lo define como:

$$E[R_t | R_t < -\alpha \times \sigma_t] = -\sigma_t \times \frac{\text{funcion densidad}(\alpha)}{\text{Funcion Distribucion Acumulada}(\alpha)}$$

- LÓPEZ (1996).

Su propuesta es emplear el error cuadrado medio (ECM) para la distribución estimada. Así, si la variable I tiene valor 1 si hay exceso, y 0 si no lo hay:

$$\text{ECM} = \frac{1}{T} \cdot \sum_{t=1}^T 2 \cdot (p_t - I_t)^2$$

Donde p será la probabilidad de estimación del VaR. Fijémonos que ECM tendrá un valor comprendido entre 0 y 2, y p será igual al nivel de confianza del VaR, entonces a menor valor de ECM, o cuánto más próximo a 0, mejor predicción del modelo empleado.

Si planteamos una propuesta mixta entre LÓPEZ y ENGEL-GIZYCKI, consistente en:

- ✓ Las características a evaluar mediante el “back testing” deben ser el conservadurismo y la eficiencia-ajuste.
- ✓ Si estas propiedades las medimos para cada método aplicando el indicador de LÓPEZ, y diferenciando entre movimientos de subida y de bajada, resultará que:
  1. El conservadurismo (C) de un método será la suma de los excesos ante movimientos de bajada y los defectos en los movimientos de subida.
  2. El ajuste-eficiencia (A-F) de cada método los definimos en función de los defectos en caso de bajada y los excesos en caso de subida.

Así pues:

$$C_i = k \cdot \left[ \frac{1}{T} \cdot \sum_{t=1}^T ((1 - p_t) - E_{i,t}^+)^2 \right] + (1 - k) \cdot \left[ \frac{1}{T} \cdot \sum_{t=1}^T (p_t - D_{i,t}^-)^2 \right]$$

$$AF_i = k \cdot \left[ \frac{1}{T} \cdot \sum_{t=1}^T ((1 - p_t) - D_{i,t}^+)^2 \right] + (1 - k) \cdot \left[ \frac{1}{T} \cdot \sum_{t=1}^T (p_t - E_{i,t}^-)^2 \right]$$

Donde i será cada uno de los métodos, T el período objeto de evaluación, p el nivel de confianza con que se estima el riesgo y:

$$E_{i,t}^+ = \begin{cases} 1 \rightarrow \text{VaR}(+) > \text{Resultado}(+) \\ 0 \rightarrow \text{VaR}(+) \leq \text{Resultado}(+) \end{cases}$$

$$D_{i,t}^+ = \begin{cases} 1 \rightarrow \text{VaR}(+) < \text{Resultado}(+) \\ 0 \rightarrow \text{VaR}(+) \geq \text{Resultado}(+) \end{cases}$$

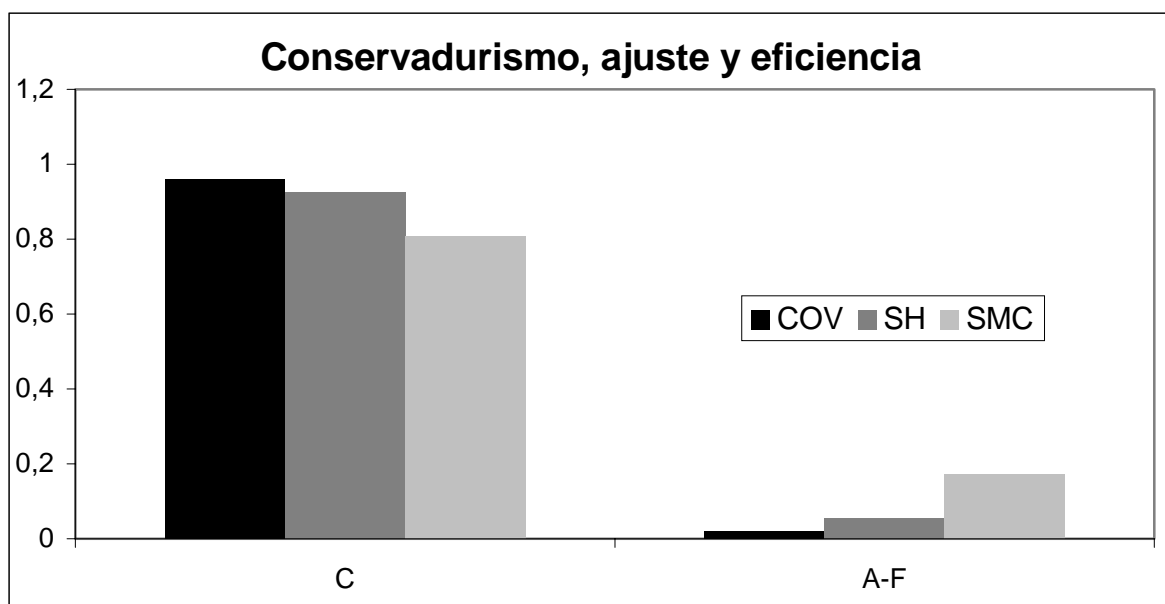
$$E_{i,t}^- = \begin{cases} 1 \rightarrow |\text{VaR}(-)| > |\text{Resultado}(-)| \\ 0 \rightarrow |\text{VaR}(-)| \leq |\text{Resultado}(-)| \end{cases}$$

$$D_{i,t}^- = \begin{cases} 1 \rightarrow |\text{VaR}(-)| < |\text{Resultado}(-)| \\ 0 \rightarrow |\text{VaR}(-)| \geq |\text{Resultado}(-)| \end{cases}$$

Donde (+) representa movimientos al alza y predicciones sobre el percentil de los beneficios, y (-) representa los movimientos de bajada y el percentil de las pérdidas.

Estos ratios van a variar entre 0 y 1, de forma que cuanto más próximos a 0 mejor calificación en lo relativo a conservadurismo, o en su caso, ajuste-eficiencia. Pero podría ocurrir, por ejemplo, que el exceso en el resultado positivo fuese 1, y el defecto en el resultado negativo fuese 0, de forma que el ratio de conservadurismo fuese indicativo de una sobreestimación. Por ello, con el objeto de que el evaluador pondere como crea conveniente los resultados positivos y negativos, se introduce la variable k, de manera que cuanto menor sea ésta, mayor preponderancia se le estará asignando a los excesos y defectos en el caso de pérdidas.

Si ahora aplicamos este “back testing” sobre una cartera compuesta por Unión Fenosa e Iberdrola, y valoramos el riesgo por matrices de covarianzas (COV), simulación histórica (SH) y simulación de Monte Carlo (SMC), para un horizonte temporal de 10 días y un nivel de confianza del 99%, los resultados que obtenemos para un período de 1 año (1996) son:



Como puede comprobarse el método más conservador, ponderando igual los resultados positivos que negativos, es el de las matrices de covarianzas; por el contrario el menos eficiente o de peor ajuste es el de Monte Carlo.

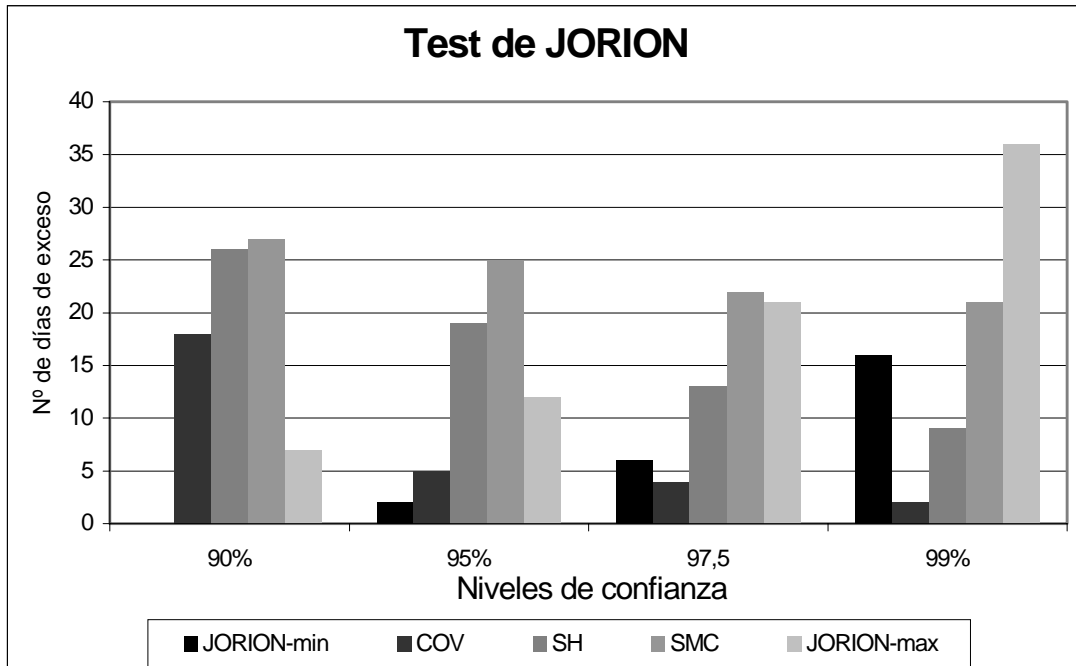
- JORION (1996).

Presenta una tabla sobre la tasa de fallos de estimación del modelo, para fijar de este modo la bondad del mismo. Así, T es el período de observaciones empleado, c el nivel de confianza y N el número de días en que la pérdida real supera a la estimada por el modelo, de forma que la tabla es:

C	p=1- c	T= 255 días	T= 510 días	T= 1.000 días
0,99	0,01	N < 7	1 < N <11	4 < N < 17
0,975	0,025	2 < N < 12	6 < N <21	15 < N < 36
0,95	0,05	6 < N < 21	16 < N <36	37 < N < 65
0,9	0,1	16 < N < 36	38 < N < 65	81 < N < 120

Por ejemplo, para T=255 días y  $p = 0,1$ , si  $N \leq 16$ , es decir, la realidad no supera a la estimación del modelo VaR en más de 16 días, entonces dicho modelo sobrestima el riesgo. En cambio si  $N \geq 36$ , la realidad supera a la estimación del modelo VaR en 36 días o más, entonces el modelo infraestima el riesgo.

Aplicando este test a una cartera compuesta por un título de Unión Fenosa y otro de Iberdrola, tomando una base de 1 año, un horizonte temporal de 10 días y un período de prueba coincidente con 1996 (aproximadamente 255 días), obtenemos para los tres métodos tradicionales sobre diferentes niveles de confianza, los siguientes resultados:



Del test de JORION se desprende que para un nivel de confianza del 90% todos los métodos infraestiman el riesgo; para el 95% sólo la matriz de covarianzas se sitúa en el intervalo óptimo, por el contrario la simulación histórica y la de Montecarlo son deficitarios en su estimación; para el 97,5% es la simulación histórica el mejor método, mientras que la de Montecarlo infraestima el riesgo y la matriz de covarianzas lo sobrestima; finalmente, para el 99% es la simulación de Montecarlo el mejor método, puesto que los otros dos sobrestiman el riesgo, cuestión que ya se puso de manifiesto al aplicar la norma de la Directiva comunitaria.

#### 4. ÚLTIMOS AVANCES

Como ya se indicó, una de las posibles soluciones a los problemas de la metodología VaR pasaba por emplear la teoría de los valores extremos, pero también se expuso que si la variable no era i.i.d., entonces los resultados no serían válidos. Por todo esto, dentro de las últimas novedades en la medición del riesgo, han aparecido propuestas que consideran la condicionalidad y los eventos extremos, esto es, mezclan el análisis de condicionalidad a través de modelos GARCH, y el estudio de las colas de la distribución del error de estimación, a través de la teoría de valores extremos, puesto que éste sí será i.i.d. Así pueden citarse dos:

✓ TAYLOR (1999).

Estima la distribución futura ( $k$ ) condicional, a través de una regresión, de forma que el cuantil de  $y_t$  (pérdida) es una función lineal de otras variables. Para ello expone  $y_t$  en función de las variables explicativas:

$$y_t = \beta \cdot x_t + \gamma \cdot e_t$$

En términos de cuantiles sería:

$$Q_t^\alpha = \beta \cdot x_t + \gamma \cdot q_t^\alpha$$

Donde  $\alpha$  es el intervalo de confianza y  $q$  representa el cuantil gaussiano correspondiente al error, puesto que como tal será i.i.d., así para  $\alpha=0,95$ , sería:

$$Q_t^{0,95} = \beta(0,95) \cdot x_t + \gamma(0,95) \cdot 1,65$$

Y para estimar los parámetros:

$$\min_{\beta, \gamma} = \left[ \sum_{y_t \geq \beta \cdot x_t + \gamma} \alpha \cdot |y_t - (\beta \cdot x_t + \gamma)| + \sum_{y_t < \beta \cdot x_t + \gamma} (1-\alpha) \cdot |y_t - (\beta \cdot x_t + \gamma)| \right]$$

Aquí dado que no existen observaciones suficientes, TAYLOR propone tomar como variable dependiente los valores estimados del cuantil para un período  $k$ , a través de la transformación. Así por ejemplo una posible regresión vectorial sería:

$$Q_{t,k}^\alpha = a + b \cdot k + c \cdot k \cdot \sigma_{t+1} + d \cdot k^2 \cdot \sigma_{t+1}$$

Donde  $k$  sería un vector con los diferentes horizontes temporales, y  $\sigma_{t+1}$  la matriz de volatilidad estimada para un período después mediante un modelo GARCH (1, 1), y para cada serie de logaritmos neperianos de las rentabilidades de cada horizonte.

✓ ENGLE y MANGANELLI (1999).

Presentan una nueva forma de estimar el riesgo, ya que en lugar de calcular la distribución, estiman el cuantil correspondiente al nivel de confianza buscado; para ello emplean el modelo Condicional Autorregresio VaR o CAViaR.

Estos modelos son de la forma:

$$\text{VaR}_t = \beta_0 + \sum_{i=1}^p \beta_i \cdot \text{VaR}_{t-1} + 1 \cdot (\beta_{p+1}; \dots; \beta_{p+q})$$



Donde  $l$  refleja el enlace entre el VaR en el momento  $t$ , y el nivel de pérdidas ( $y$ ) en el momento  $t-1$ , esto es, cómo debe cambiar el VaR sobre la nueva información.

Para estimar los parámetros minimizan la función objetivo de regresión de cuantiles, pero como dicha función no es diferenciable, recurren a un algoritmo genético de optimización numérica, ya que no es una función lineal; en concreto aplican el “Differential Evolutionary Genetic Algorithm” (DEGA). Estos algoritmos dependen de la población extraída como muestra, la recombinación de factores característicos y la mutación de dichas características, de forma que generan una diversidad adecuada para la estimación.

## 5. SUMARIO Y CONCLUSIONES

Este trabajo presenta dos partes claramente diferenciadas, por un lado, los problemas que aparecen en la aplicación de la metodología VaR, y por otro, qué análisis pueden acompañar a las mediciones de riesgos con el objetivo de mejorar su fiabilidad.

El primer bloque relativo a los problemas de las técnicas de medición de riesgos, está dividido en dos apartados, uno primero en el que se estudian las propiedades que debe cumplir toda medida coherente del riesgo, y otro, sobre los principales problemas al implementar las técnicas de medición.

Dentro del apartado dedicado a los axiomas hemos comprobado que existen dos incumplimientos fundamentales, uno relativo a la propiedad de subaditividad y que supone que correlaciones positivas infraestimen el riesgo, mientras que las negativas lo sobrestimen; y otro relacionado con la monotocidad y el inconveniente de los métodos de estimación basados en percentiles.

En cuanto a los problemas de implementación hemos presentado una lista bastante extensa, dentro de la cual aparecen:

- \* La distribución de las tasas de variación de los precios no sigue una distribución normal.
- \* La volatilidad no es constante, lo que a su vez conlleva otros inconvenientes, en concreto, la regla de la raíz cuadrada del tiempo no es fiable, la base de estimación debe estar ponderada y existe una relación entre volatilidad-tiempo-precio, lo que da lugar a la superficie de volatilidad.
- \* La liquidez es un factor a considerar, así se estudia la propuesta de GARMAN y KLASS (1997) que pasa por emplear más información que los precios de cierre.

- \* La correlación estimada como relación lineal no es una forma adecuada de introducir en el modelo las relaciones entre los factores, sobre todo si la distribución no es normal. En este sentido, se ha estudiado y presentado otra propuesta relacionada con las duplas.
- \* Los métodos de valoración que se empleen para productos OTC, también generan errores en el resultado final.
- \* En resumen, todos los problemas anteriores, además del hecho de que existen diversas técnicas de medición, conducen a que el VaR no es un valor único, sino que en función de las hipótesis de partida se obtendrán diferentes resultados. Así, se ha aplicado el test de HULL y WHITE (1998), obteniéndose como mejor solución la simulación histórica.

Como consecuencia de las conclusiones anteriores es preciso mejorar la fiabilidad de la estimación, de ahí nace la justificación de la segunda parte del trabajo, dedicada a los análisis complementarios y la validación del modelo.

Dentro de los análisis complementarios se han estudiado tres grupos, el “stress test”, los análisis de sensibilidad y las aproximaciones mecánicas.

A su vez, en el “stress test” se ha diferenciado entre el hipotético, el histórico y el estadístico, siendo la conclusión que sólo este último presenta valor añadido a la estimación VaR. En concreto, se ha trabajado sobre el “stress” estadístico condicional, y una propuesta de integración entre “stress” y VaR, presentada por BERKOWITZ (1999b).

En el análisis de sensibilidad se han estudiado las propuestas de GARMAN (1997a, b, c) y DOWD (1998), que aunque son meras aproximaciones, con algunos ajustes presentan una información relevante y adicional al VaR.

Finalmente, dentro de las aproximaciones mecánicas se han presentado cuatro líneas de trabajo:

- \* El “worst case” o peor caso, de donde se ha concluido que las estimaciones deben realizarse sobre una base ponderada, pues así se consiguen mejores resultados. En este sentido se ha presentado la simulación histórica antitética y ponderada.
- \* Pérdida máxima cuadrática.
- \* “Shocks” de casos extremos, donde el principal problema reside en la determinación de la correlación entre dichos eventos.

\* Teoría de valores extremos, que aunque a través de estimaciones como el MaxVaR y el “shortfall” se pueden lograr resultados más fiables, también presenta tres problemas principales, la escasez de datos en la cola de la distribución, la variabilidad del índice de la cola y la condicionalidad de las observaciones.

En cuanto a las técnicas de validación del modelo se ha constatado que el error estándar no es válido por cuanto la volatilidad y la correlación no son constantes, y por otro lado, el “back testing” propuesto por la normativa europea y BIS (teórico y real) conlleva una conducta irracional del gestor, puesto que elegirá aquel método que más infraestime el riesgo. Por todo esto, se introduce un tercer grupo de técnicas, los tests de pérdidas excedidas. Dentro de estas técnicas no sólo se estudian las propuestas existentes (KUPIEC, BERKOWITZ, ZANGARI, LÓPEZ, etc.), sino que se concluye que la validación debe pasar por el análisis del ajuste-eficiencia (infraestimación) y del conservadurismo (sobreestimación); en este sentido se presenta una propuesta de validación.

Por último, se presentan las que pueden ser las futuras líneas de trabajo en la medición del riesgo, en concreto la mezcla de la condicionalidad y la teoría de valores extremos; así destacan dos técnicas como son la regresión condicional de cuantiles y el Condicional Autorregresivo VaR.

## 6. BIBLIOGRAFÍA

- ✓ ANDERSSON, F. y URYASEV, S. (1999) *Credit risk optimization with conditional Value at Risk criterion*. Center for Applied Optimization. Research report 99-9. University of Florida.
- ✓ ARTZNER, P.; DELBAEN, F.; EBER, J.; HEATH, D. (1998). *Coherent measures of risk*. ETH. Zurich.
- ✓ AVELLANEDA, M. y ZHU, Y. (1997). *A risk-neutral stochastic volatility model*. Courant Institute of Mathematical Sciences. University of New York. <http://www.math.nyu.edu/faculty/avellane/>.
- ✓ BAHAR, R.; GOLD, M. y POLIZU, C. *Path-based methods for the measurement of market risk*. “Risk management for financial institutions: advances in measurement and control”. PriceWaterhouse and Risk Publications. Londres.
- ✓ BERKOWITZ, J. (1999a). *Evaluating the forecasts of risk models*. Federal Reserve Board. Washington.

- ✓ BERKOWITZ, J. (1999b). *A coherent framework for stress-testing*. Federal Reserve Board. Washington.
- ✓ CHRISTOFFERSEN, P. (1995). *Evaluating interval forecasts*. Department of Economics. University of Pennsylvania.
- ✓ CHRISTOFFERSEN, P.; DIEBOLD, F. y SCHUERMAN, T. (1998). *Horizon problems and extreme events in financial risk management*. Financial Institutions Centre of the Wharton School. Working paper 98-16. University of Pennsylvania.
- ✓ CRNOKIC, C. y DRACHMAN, J. (1997). *Quality control*. "VaR: Understanding and applying Value-at-Risk". Risk Publications. Londres.
- ✓ CRUZ, M.; COLEMAN, R. y SALKIN, G. (1998). *Modeling and measuring operational risk*. "The Journal of Risk" vol. 1 n°1.
- ✓ DEWOODY, Y. GURURAJ, V. T. y MARTIN, C. (1999). *Assessing risk for rare events*. "Journal of Applied Statistics". Vol. 26, n° 6. Págs. 681-687.
- ✓ DIEBOLD, F.; HICKMAN, A.; INOUE, A. y SCHUERMAN, T. (1997). *Converting 1-day volatility to h-day volatility: scaling by  $\sqrt{h}$  is worse than you think*. Financial Institutions Centre of the Wharton School. . Working paper 97-34. University of Pennsylvania.
- ✓ DIEBOLD, F.; SCHUERMAN, T y STROUGHAIR, J. (1998). *Pitfalls and opportunities in the use of Extreme Value Theory in risk management*. Financial Institutions Centre of the Wharton School. Working paper 98-10. University of Pennsylvania.
- ✓ DIMSON, E. y MARSH, P. (1996). *Stress test of capital requirements*. Financial Institutions Centre of the Wharton School. Working paper 96-50. University of Pennsylvania.
- ✓ Directiva 98/31/CE del Parlamento Europeo y del Consejo, de 22 de junio de 1998, por la que se modifica la Directiva 93/6/CEE del Consejo sobre la adecuación del capital de las empresas de inversión y las entidades de crédito (DOCE 21/7/98).
- ✓ DOWD, K. (1998). *Beyond Value at Risk. The new science of risk management*. John Wiley and sons. West Sussex.
- ✓ EMBRECHTS, P.; McNEIL, A. y STRAUMANN, D. (1999) *Correlation and dependence in risk management: properties and pitfalls*. ETH. Zurich.
- ✓ ENGEL, J. y GIZYCKI, M. (1999). *Conservatism accuracy and efficiency: comparing Value-at-Risk models*. Working papers n° 2. Reserve Bank of Australia.

- ✓ ENGLE, R. y MANGANELLI, S. (1999). *CAViaR: Condicional Value at Risk by quantile regression*. National Bureau of Economic Research. Working paper 7341. Cambridge (Massachusetts).
- ✓ GARMAN, M. B. (1997a). *Ending the search for component VaR*. <http://www.fea.com>.
- ✓ GARMAN, M. B. (1997b). *¿Cómo conseguir que el análisis del Valor en Riesgo sea proactivo?* <http://www.fea.com>.
- ✓ GARMAN, M. B. (1997c). *Descomposición de los elementos componentes del VeR dentro de una cartera de inversión*. <http://www.fea.com>.
- ✓ GARMAN, M. B. y KLASS, M. J. (1997). *The estimation of security price volatility from newspaper data*. <http://www.fea.com>.
- ✓ HESTON, S. (1993). *A closed-form solution for options with stochastic volatility with application to bond and currency options*. "Review of Financial Studies" nº 6. Págs. 327-343.
- ✓ HO, J. (1997). *OAS modeling of fixed-rate pass throughs: Implementational issues*. "Interest rate risk models. Theory and practice" editado por Anthony J. Cornyn y Elizabeth Mays. Glenlake Publishing Company Ltd. y Fitzroy Dearborn Publishers. Chicago.
- ✓ HULL, J. y WHITE, A. (1998). *Incorporating volatility updating into the historical simulation method for value-at-risk*. "The Journal of Risk". Vol.1, nº1. Pags 5-19.
- ✓ JORION, P. (1996). *Value at Risk: The new benchmark for controlling market risk*. Irwin Professional Publishing. Chicago.
- ✓ KIM, J. y FINGER, C. (1999) *A stress test to incorporate correlation breakdown*. RiskMetrics Group. New York.
- ✓ KOEDIJK, K.; HUISMAN,, R. Y POWNALL R. (1998). *VaR-x: fat tails in financial risk management*. "The Journal of Risk" vol. 1 nº1.
- ✓ KUPIEC, P. (1995). *Techniques for verifying the accuracy of risk measurement models*. "The Journal of Derivatives".
- ✓ KUPIEC, P. (1998). *Stress testing in a Value at Risk framework*. "The Journal of Derivatives".
- ✓ LÓPEZ, J. (1996). *Regulatory Evaluation of Value at Risk models*. Financial Institutions Centre of the Wharton School. Working paper 96-51. University of Pennsylvania.

- ✓ LUCAS, L. (1998). *Testing Backtesting: an evaluation of the Basle guidelines for backtesting internal risk management models of banks*. Research Memorandum 98-1. Vrije Universiteit. Amsterdam.
- ✓ MARSHALL, C. y SIEGEL, M. (1996). *Value at Risk: implementing a risk measurement standard*. Financial Institutions Centre of the Wharton School. Working paper 96-47. University of Pennsylvania.
- ✓ MATTEN, C. (1996). *Managing Bank Capital: Capital Allocation and Performance Measurement*. John Wiley and sons. West Sussex.
- ✓ MORRISON, J. (1999). *How to stress test your credit portfolio*. "The Journal of Business Forecasting". Spring. Págs. 22-28.
- ✓ PRITSKER, M. (1996). *Evaluating Value at Risk methodologies: accuracy versus computational time*. Financial Institutions Centre of the Wharton School. Working paper 96-48. University of Pennsylvania.
- ✓ RISK METRICS en <http://www.jpmorgan.com>.
- ✓ SHARPE, W. (1997). *Morningstar's performance measures*.  
<http://www.sharpe.stanford.edu>.
- ✓ SHARPE, W. (1998). *Morningstar's risk-adjusted ratings*.  
<http://www.sharpe.stanford.edu>.
- ✓ SHIMIZU, T. (1998). *Dynamic macro stress exercise including feedback effect*. Institute for Monetary and Economic Studies. Bank of Japan.
- ✓ STUDER, G. y LÜTHI, H.-J. (1996). *Quadratic maximum loss for risk measurement of portfolios*. RiskLab Technical Report. Zurich.
- ✓ TAYLOR, J. (1999). *A quantil regression approach to estimating the distribution of multiperiod returns*. "The Journal of Derivatives".
- ✓ ZANGARI, P. (1996). *How accurate is the delta-gamma methodology?* "Risk Metrics Monitor". New York.