

**EFFECTOS DE VINCULAR LA PENSIÓN PÚBLICA A LA
INVERSIÓN EN CANTIDAD Y CALIDAD DE HIJOS EN UN
MODELO DE EQUILIBRIO GENERAL**

Robert Meneu Gaya

De conformidad con la base quinta de la convocatoria del Programa de Estímulo a la Investigación, este trabajo ha sido sometido a evaluación externa anónima de especialistas cualificados a fin de contrastar su nivel técnico.

ISBN: 84-89116-07-5

La serie **DOCUMENTOS DE TRABAJO** incluye avances y resultados de investigaciones dentro de los programas de la Fundación de las Cajas de Ahorros.

Las opiniones son responsabilidad de los autores.

EFFECTOS DE VINCULAR LA PENSIÓN PÚBLICA A LA INVERSIÓN EN CANTIDAD Y CALIDAD DE HIJOS EN UN MODELO DE EQUILIBRIO GENERAL

MENEU GAYA, ROBERT

Departamento de Matemática para la Economía y la Empresa
Universidad de Valencia

Correo electrónico: Robert.Meneu@uv.es

RESUMEN

El artículo investiga los efectos sobre las principales variables económicas y sobre la cantidad y calidad de hijos que cabría esperar si en el cálculo de la pensión pública de jubilación se incorpora bien el número de hijos o bien el gasto en educación de los hijos. El modelo de equilibrio de base está formado por un entorno demográfico de generaciones solapadas de tres periodos, por consumidores representativos que maximizan su utilidad, por un solo sector productivo con función de producción de rendimientos constantes a escala cuyos inputs son el capital físico y el capital humano, por empresas competitivas y por un sector público que gestiona un sistema de pensiones de reparto. El artículo compara las soluciones bajo tres supuestos: con una pensión pública exógena a la decisión del individuo, con una pensión pública que depende del número de hijos y con una pensión pública que depende del gasto en educación de los hijos. Para cada modelo se analiza el estado estacionario y la dinámica del equilibrio bajo formas funcionales habituales y se resuelve numéricamente con valores de los parámetros razonables. Los resultados muestran que incorporar únicamente la cantidad de hijos no supone mejoras de bienestar ya que, si bien a corto plazo aumenta el número de hijos, la inversión en su educación es menor tanto a corto como a largo plazo, implicando menor consumo y pérdida de bienestar. Sin embargo, si se vincula la pensión al gasto educativo hay efectos positivos y duraderos sobre el bienestar de todas las generaciones excepto la primera tras la reforma.

PALABRAS CLAVE: Crecimiento endógeno, Seguridad Social, Capital Humano, Fertilidad.

1.- Introducción

El artículo investiga los efectos económicos de vincular la pensión pública de jubilación al número de hijos o al gasto en su educación. La justificación de esta medida es que los ingresos futuros de un sistema de seguridad social de reparto dependen de las cotizaciones de los futuros trabajadores, los cuales nacen, son alimentados y educados por la generación actual. Así pues, tener hijos y darles educación para que sean más productivos se puede considerar como una aportación más al sistema de pensiones lo que podría justificar que la pensión de jubilación lo tuviera en cuenta. Detrás de esta justificación, sin embargo, está la convicción de que la cantidad y/o calidad de los hijos son una fuente de crecimiento económico. Esta idea se encuentra en Sinn (2001); Abío y Patxot (1999, 2005); Abío y otros (2004), quienes definen a este sistema como “sistema de reparto vinculado a la fertilidad” o *PAYG pension system with fertility link*; y en Meier y Wrede (2005), donde la pensión queda vinculada a la fertilidad y a la educación.

Para analizar los efectos macroeconómicos de estas propuestas se utiliza un modelo de equilibrio general con demografía de generaciones solapadas, consumidores racionales con fertilidad y educación endógenas, un sector público que gestiona un sistema de pensiones públicas de reparto y un sector privado con empresas competitivas maximizadoras de beneficios y con una función de producción de un solo bien.

La metodología para llegar a los resultados que se persiguen consiste en desarrollar un modelo básico de equilibrio en el que la pensión es totalmente exógena a la decisión del individuo en cuanto a tener hijos y educarlos; y, luego, reformar dicho modelo incorporando, primero, una pensión que depende del número

de hijos y, segundo, una pensión que depende del gasto en educación. La comparación de las soluciones de los dos modelos reformados con la del modelo básico establecerá cuáles son los efectos económicos de estas propuestas.

La aportación respecto a los trabajos anteriormente citados es la consideración simultánea de la educación y la fertilidad como variables de decisión dentro del modelo teórico de equilibrio frente a Abío y Patxot (1999, 2005) que sólo consideran la fertilidad; y Meier y Wrede (2005) donde la educación y fertilidad son variables de decisión pero no hay un modelo de equilibrio general subyacente.

Literatura a nivel teórico se puede citar a Becker y otros (1990) donde la fertilidad es endógena y la calidad de los hijos viene representada por el tiempo gastado por los padres en la educación de los hijos, aunque sin seguridad social. El mismo tratamiento para las variables se da en Morand (1999), donde se añade al anterior análisis una variable de transferencia a los padres como sustitutivo de la seguridad social y en Kalemlı-Ozcan (2003) donde se extiende al caso de incertidumbre sobre la mortalidad infantil. En Peters (1995) se investiga la optimalidad en un modelo de crecimiento endógeno teniendo en cuenta las externalidades que suponen las subvenciones familiares debido a su efecto sobre el número de hijos y su educación. En trabajos como Pecchenino y Utendorf (1999), Boucekkine y otros (2002) y López Díaz y Ridruejo (2003), se contempla la Seguridad Social y, de una u otra manera, la variable de nivel educativo, pero en todos ellos la fertilidad es exógena. En cuanto a la interrelación entre seguridad social y fertilidad se puede destacar a Cigno (1993), que trata a los hijos como una forma de inversión, Blackburn y Cipriani (1998), Wigger (1999), Zhang y Zhang (2001) y Van Groezen y otros (2003). Abío y Patxot (1999) o Abío y otros (2004) no

incluyen la calidad de los hijos aunque el análisis se enriquece introduciendo una estructura demográfica más completa en el primer caso y tomando como endógena la oferta de trabajo femenino en el segundo. Meier y Wrede (2005) sí que consideran endógenas la cantidad y la calidad de hijos aunque su modelo se refiere a una Economía pequeña y abierta, con tipos de interés y salarios exógenos y sin efectos macroeconómicos.

En cuanto a estudios empíricos, se puede citar a Barro y Sala-i-Martin (1995), quienes muestran que en la explicación del crecimiento del PIB per cápita, el gasto público en educación sobre el PIB entra de forma positiva y significativa, mientras que el coeficiente de la tasa total de fertilidad es negativo y significativo. Cigno y otros (2000) incluyen variables relacionadas con la seguridad social y prestaciones por hijos, para obtener relaciones a largo plazo entre estas variables, la tasa de fertilidad, los salarios, la tasa de ahorro y los tipos de interés; obteniendo que la fertilidad debe considerarse variable endógena y que la cobertura de la seguridad social afecta negativamente a la fertilidad, dando consistencia al modelo de Cigno (1993) que considera a los hijos bienes de inversión. Hondroyannis y Papapetrou (2002 y 2005) encuentran cointegración entre variables económicas y demográficas en varios países de Europa con una relación positiva entre el PIB per cápita y la fertilidad (efecto renta positivo para la demanda de hijos) y una relación negativa entre los salarios y la fertilidad (efecto sustitución de los salarios). McNown (2003) y McNown y Rajbhandary (2003) realizan estudios similares para Estados Unidos.

Este trabajo se organiza en cuatro partes. En primer lugar se describe el modelo teórico que representa a la Economía, se obtienen las ecuaciones de equilibrio con funciones genéricas y se resuelven analíticamente asumiendo formas

funcionales habituales en la literatura. En las secciones 3 y 4 se modifica este modelo básico haciendo depender la pensión de jubilación del número de hijos en primer lugar y del gasto educativo en segundo lugar. Los resultados obtenidos se comparan entre sí y con los del modelo básico. En la sección 5 se calibra el modelo con valores razonables para los parámetros y se cuantifica el valor de las variables bajo los tres modelos. También se incorpora análisis de sensibilidad y de la estabilidad dinámica del equilibrio. La última sección se dedica a las conclusiones.

2.- El modelo de partida

Demografía

El modelo demográfico es de generaciones solapadas, Samuelson (1958) y Diamond (1965). Se supone que en cada periodo viven tres generaciones y, por tanto, que cada cohorte vive un máximo de tres periodos. Las variables demográficas son L_t^0 (Número de niños en el periodo t), L_t^1 (Número de adultos en el periodo t) y L_t^2 (Número de ancianos en el periodo t). La relación entre ellas viene dada a través de n_t , número de hijos por adulto en el periodo t (variable de decisión) y de π , probabilidad de supervivencia de adulto a anciano ($0 < \pi < 1$). Así pues:

$$L_t^0 = n_t L_t^1 \quad L_t^1 = L_{t-1}^0 \quad L_t^2 = \pi L_{t-1}^1$$

Comportamiento del consumidor representativo

Los individuos toman decisiones cuando son adultos. Ellos disponen de una unidad de tiempo y de unidades de capital humano (nivel de educación) obtenidas en la primera etapa de su vida, que ofrecen a las empresas a cambio de un salario. Deben decidir el número de hijos y cómo distribuyen los ingresos de su salario neto (tras descontar la cotización a la seguridad social y la alimentación de los hijos) entre

consumo propio, ahorro y educación de sus hijos; según su función de utilidad y restricciones. La función de utilidad del consumidor representativo que es adulto en un periodo t depende del consumo propio en ese periodo (c_t), del consumo cuando es anciano (d_{t+1}), del número de hijos (n_t) y del gasto en educación de cada hijo (e_t). Siguiendo modelos teóricos similares, se opta por una función de utilidad separable:

$$U = u(c_t) + \beta\pi u(d_{t+1}) + a(n_t)n_t u(e_t) \quad [1]$$

Los tres términos de la expresión (1) indican que el consumidor valora tres cosas: el consumo propio cuando es adulto; el consumo propio en la vejez, ponderando con el parámetro $\beta > 0$ que indica la preferencia temporal en el consumo (con $0 < \beta\pi < 1$ por coherencia con los modelos sin probabilidad de supervivencia); y la educación proporcionada a cada hijo, que se pondera por el número de hijos y por una función $a(n_t)$ que es el grado de altruismo por hijo y es decreciente con el número de hijos, $a'(n_t) < 0$. Este tercer término es la utilidad que se deriva de tener hijos y darles educación y su modelización se basa en Becker y otros (1990). Según estos autores la tasa de descuento entre generaciones está determinada por el grado de altruismo de los padres hacia los hijos y depende negativamente del número de hijos.

Este individuo representativo es racional y maximizará su función de utilidad teniendo en cuenta sus restricciones presupuestarias, que son:

$$c_t = w_t e_{t-1} (1 - \tau - bn_t^\sigma) - n_t e_t - s_t \quad [2a]$$

$$d_{t+1} = s_t \frac{1 + r_{t+1}}{\pi} + \mu_{t+1} \quad [2b]$$

$$c_t, d_{t+1}, s_t, e_t, n_t \geq 0.$$

En [2a], el individuo distribuye su salario bruto entre cotizar a la seguridad social, mantener y educar a sus hijos, ahorrar para la vejez y consumir. Para ello, w_t es el salario por unidad de capital humano y e_{t-1} es el número de unidades de capital humano que tiene cada individuo (igual a la inversión en educación que realizaron sus padres en él). $\tau \in]0,1[$ es el tipo de cotización. El gasto en mantener a los hijos se ha incorporado en la restricción presupuestaria como una parte del salario creciente y cóncava con el número de hijos, $b \in]0,1[$ y $\sigma \in]0,1[$; esta modelización responde mejor a la realidad estadística según la cual los gastos por hogar aumentan con el nivel de ingresos del hogar mientras que ese aumento es decreciente con el número de hijos (ver la Encuesta Continua de Presupuestos Familiares del INE). El gasto educativo es $n_t e_t$, según la definición de ambas variables. Y, por último, el ahorro es s_t .

En [2b], el consumo en la vejez es igual al ahorro de su anterior etapa más los intereses equivalentes desde un punto de vista financiero-actuarial (r_{t+1} es el tipo de interés financiero) más la pensión de jubilación (μ_{t+1}).

El problema del consumidor es elegir el número de hijos, el gasto en educación para cada uno de ellos y el ahorro que maximiza [1] sujeto a las restricciones [2] y a las condiciones de no negatividad. En este problema el consumidor toma como dados el salario, el tipo de interés y la pensión de jubilación. En términos matemáticos, la función de utilidad que resulte tras sustituir [2] en [1] debe cumplir alguna condición suficiente de segundo orden, normalmente la concavidad estricta (aunque bastaría que fuera estrictamente pseudocóncava), para

que las condiciones necesarias de primer orden determinen un máximo global único. En el anexo se establece una condición suficiente para la estricta concavidad de la función de utilidad.

Sustituyendo [2] en la función de utilidad, las condiciones de primer orden respecto a (s_t, e_t, n_t) , suponiendo solución interior son:

$$u'(c_t) = \beta(1 + r_{t+1})u'(d_{t+1}) \quad [3a]$$

$$u'(c_t) = a(n_t)u'(e_t) \quad [3b]$$

$$(e_t + b\sigma w_t e_{t-1} n_t^{\sigma-1})u'(c_t) = (a'(n_t)n_t + a(n_t))u(e_t) \quad [3c]$$

La condición [3a] es la típica condición de arbitraje para el consumo del individuo en las etapas adulta y de vejez. El cociente entre utilidades marginales o relación marginal de sustitución entre consumo actual y futuro debe ser igual al factor financiero-actuarial. La condición [3b] muestra la relación de arbitraje entre consumo actual propio y gasto en educación por hijo. Por último, la condición [3c] es la que determina la demanda de hijos al comparar la utilidad adicional que proporciona una unidad marginal más de hijos con la que se pierde vía menor consumo actual.

Sector público

La única actividad que realiza el sector público en esta Economía simplificada es la del pago de pensiones de jubilación y la recaudación de cotizaciones. Bajo un sistema de reparto ($\tau=0$ representaría un sistema de capitalización privado) la ecuación de presupuesto equilibrado en el periodo $t+1$ es:

$$\tau w_{t+1} e_t L_{t+1}^1 = \mu_{t+1} L_{t+1}^2 \rightarrow \mu_{t+1} = \frac{\tau w_{t+1} e_t n_t}{\pi} \quad [4]$$

Comportamiento del sector productivo

La empresa representativa de esta Economía utiliza capital físico (K_t) y humano (H_t) como inputs y produce un único bien o output (Y_t) mediante una función de producción de rendimientos constantes a escala $Y_t = F(K_t, H_t)$. Esta función adopta los supuestos habituales de productividades marginales positivas y decrecientes. La empresa representativa es competitiva y maximiza sus beneficios:

$$\frac{\partial Y_t}{\partial K_t} = \frac{\partial F}{\partial K_t} = r_t + \delta_K \quad [5a]$$

$$\frac{\partial Y_t}{\partial H_t} = \frac{\partial F}{\partial H_t} = w_t \quad [5b]$$

Siendo δ_K la tasa constante de depreciación del capital físico. Por su parte, la empresa no soporta ningún coste de depreciación del capital humano. El coste r_t es también el rendimiento del ahorro ya que se supone que el mercado de capitales es perfecto. La producción y el capital físico se pueden expresar en términos del capital humano, como es habitual: $y_t = \frac{Y_t}{H_t} = F\left(\frac{K_t}{H_t}, 1\right) = F(k_t, 1) = f(k_t)$.

El equilibrio en el mercado del único bien producido lleva a la conocida condición de vaciado de mercado. Al ser un modelo de un sector, el bien producido en un periodo t puede destinarse tanto a satisfacer el consumo de los individuos (C_t), como a invertir en capital físico (I_t^K) y en capital humano o educación (I_t^H):

$$Y_t = C_t + I_t^K + I_t^H = C_t + K_{t+1} - (1 - \delta_K)K_t + H_{t+1} \quad [6]$$

Obsérvese que la inversión en capital humano coincide con el capital humano del periodo siguiente, es decir, se supone que el capital humano va ligado a los

miembros de la generación adulta en cada periodo, que lo han adquirido con la educación recibida cuando fueron jóvenes y se extingue al pasar a la jubilación.

El cumplimiento de la ecuación [6] indica, en general, que hay relación entre la acumulación de ambos tipos de capital, dado que hay un único bien en esta Economía. Sin embargo, es habitual en estos modelos incorporar el supuesto que el capital físico se acumula con el ahorro y el capital humano con el gasto en educación, es decir:

$$K_{t+1} = s_t L_t^1, \quad \forall t \quad [7a]$$

$$H_{t+1} = e_t L_{t+1}^1 = e_t n_t L_t^1, \quad \forall t \quad [7b]$$

En [7a], se establece que el ahorro de un periodo se transforma en capital productivo en el periodo siguiente; y, en [7b], se asume que cada unidad del bien dedicada a educación de cada hijo se transforma en una unidad de capital humano en el periodo siguiente.

Las ecuaciones [7] asegurarán el equilibrio en el mercado del bien, es decir el cumplimiento de la ecuación [6], dado el comportamiento de la empresa competitiva, la función de producción y la función de consumo. En términos de capital físico por unidad de capital humano, tras dividir los dos miembros de [7a] entre los dos de [7b] se llega a una equivalencia que permite trabajar indistintamente con la variable s_t o

k_{t+1} :

$$k_{t+1} = \frac{s_t}{e_t n_t}, \quad \forall t \quad [8]$$

Equilibrio competitivo

Esta economía se encuentra en equilibrio competitivo si dados unos niveles iniciales de capital físico y capital humano y dada una población inicial para cada generación, se cumple simultáneamente a partir del periodo actual que:

- la decisión del consumidor en cuanto a consumo-ahorro, número de hijos y gasto educativo maximiza su utilidad, es decir, cumple las ecuaciones [2] y [3],
- el presupuesto de la seguridad social está en equilibrio según [4],
- las empresas maximizan sus beneficios, es decir, se cumple [5], y
- el mercado del único bien producido se vacía, lo cual significa con los supuestos adoptados que se cumple [6], [7] y [8].

El equilibrio competitivo consiste, por tanto, en elegir trayectorias temporales para las variables de decisión $(k_{t+1}, e_t, n_t) \quad \forall t = 1, \dots, \infty$, que junto con las consiguientes trayectorias para el resto de variables cumplan todas las ecuaciones del modelo. Estas variables son los precios de los factores productivos, (r_t, w_t) , la pensión de jubilación, μ_t , y las variables de estado (nivel de capital físico y humano, población de cada generación, producción agregada, consumo agregado, inversión bruta, etc.).

Solución analítica

El modelo es demasiado genérico para obtener alguna característica importante del equilibrio por eso se pasa a resolverlo para el caso de función de utilidad logarítmica, grado de altruismo con elasticidad constante y función de producción Cobb-Douglas, es decir, se asumen las siguientes formas funcionales:

$$U(c_t, d_{t+1}, n_t, e_t) = \ln(c_t) + \beta\pi \ln(d_{t+1}) + \delta n_t^{-\varepsilon} n_t \ln(e_t)$$

$$Y_t = AK_t^\alpha H_t^{1-\alpha} \rightarrow y_t = f(k_t) = Ak_t^\alpha$$

La función $a(n_t) = \delta n_t^{-\varepsilon}$ mide el grado de altruismo, que es decreciente respecto al número de hijos, siguiendo a Becker y otros (1990); $\delta > 0$ es el grado de altruismo cuando el número de hijos es 1 y ε ($0 \leq \varepsilon < 1$) es la elasticidad del grado de altruismo respecto al número de hijos. En la función de producción, el parámetro A representa el nivel tecnológico de la Economía y α es la participación de las rentas del capital físico sobre el producto total. Se supone también que el capital físico se deprecia totalmente en el proceso productivo, $\delta_K = 1$.

Con estas funciones, las condiciones de equilibrio competitivo [2] y [3] son:

$$\frac{1}{c_t} = \frac{\beta A \alpha k_{t+1}^{\alpha-1}}{d_{t+1}} ; \quad \frac{1}{c_t} = \frac{\delta n_t^{-\varepsilon}}{e_t} ;$$

$$\frac{e_t + b\sigma A(1-\alpha)e_{t-1}n_t^{\sigma-1}k_t^\alpha}{c_t} = \delta(1-\varepsilon)n_t^{-\varepsilon} \ln(e_t) ;$$

$$c_t = A(1-\alpha)(1-\tau - bn_t^\sigma)k_t^\alpha e_{t-1} - n_t e_t (1+k_{t+1}) ; \quad d_{t+1} = A\left(\frac{\alpha + \tau(1-\alpha)}{\pi}\right)n_t e_t k_{t+1}^\alpha$$

Manipulando las ecuaciones se obtienen las tres variables (k_{t+1}, e_t, n_t) :

$$k_{t+1} = \frac{\pi\beta\alpha}{\delta(\alpha + \tau(1-\alpha))n_t^{1-\varepsilon}} = \frac{G}{n_t^{1-\varepsilon}} \quad [9]$$

$$e_t = \frac{\delta A(1-\alpha)(1-\tau - bn_t^\sigma)k_t^\alpha e_{t-1}}{(1+\delta G)n_t^\varepsilon + \delta n_t} \quad [10]$$

$$e_t[(1-\varepsilon)\ln(e_t) - 1]n_t^{1-\sigma} = A(1-\alpha)b\sigma k_t^\alpha e_{t-1} \quad [11]$$

Las ecuaciones [9], [10] y [11] forman un sistema de ecuaciones en diferencias con el que se determinan las variables (k_{t+1}, e_t, n_t) para todo periodo conociendo los valores del periodo anterior (k_t, e_{t-1}, n_{t-1}) . Así pues, a partir de unos valores iniciales y aplicando el método recursivo hacia adelante se obtienen las trayectorias temporales para las tres variables. Asimismo el resto de variables; precios de los factores productivos, producción, utilidad, etc.; van apareciendo sustituyendo estas tres en las ecuaciones correspondientes.

Estado estacionario

Un estado estacionario es un equilibrio competitivo en el que las variables de estado; producción, capital físico, capital humano y población, crecen a una tasa constante. Esto significa que $k_t = k_{t+1} = k$, $e_t = e_{t+1} = e$ y $n_t = n_{t+1} = n$, $\forall t$. La solución de estado estacionario es la que se utilizará para comparar el modelo básico con los dos modelos reformados.

El número de hijos compatible con el estado estacionario, n^* , será aquel que resuelva la siguiente ecuación deducida de [10], tras sustituir [9] y simplificar:

$$(1 + \delta G)n^\varepsilon + \delta n = \delta A(1 - \alpha)(1 - \tau - bn^\sigma)G^\alpha n^{\alpha(\varepsilon-1)}$$

Ecuación que admite solución única para algún valor $n^* > 0$ debido al comportamiento opuesto de ambos miembros. El primero vale cero si $n=0$ y tiende a infinito de forma estrictamente creciente si $n \rightarrow \infty$, mientras que el segundo miembro de la ecuación tiende a infinito si $n \rightarrow 0$ y tiende a 0 de forma estrictamente decreciente si $n \rightarrow \infty$.

A partir de este valor de equilibrio estacionario se calcula, con las ecuaciones [9] y [11], los valores k^* y e^* , compatibles con el equilibrio estacionario:

$$k^* = \frac{G}{n^{*1-\varepsilon}}, \quad e^* = \exp\left\{\frac{1}{1-\varepsilon} + \frac{A(1-\alpha)b\sigma k^{*\alpha}}{(1-\varepsilon)n^{*1-\sigma}}\right\}$$

Esto supone una relación de intercambio entre cantidad y calidad de hijos, siendo por tanto bienes sustitutivos para el sujeto representativo. Además, en esta situación, la producción, el capital físico y el capital humano crecen a la misma tasa que la población n^*-1 . En el epígrafe 5 se calibra este modelo, cuantificando la influencia de los distintos parámetros sobre el equilibrio estacionario.

3.- Modelo con pensión de jubilación vinculada al número de hijos

Si con el objetivo de favorecer la fertilidad, como fuente de crecimiento económico que es, se explicita que el importe de la pensión de jubilación está multiplicada por el número de hijos y esto es conocido por los cotizantes actuales, el consumidor maximizará su función de utilidad [1] sujeto a las restricciones [2a] y:

$$d_{t+1} = s_t \frac{1+r_{t+1}}{\pi} + n_t \bar{\mu}_{t+1} \quad [2b']$$

Donde, en [2b'], $\bar{\mu}_{t+1}$ es la pensión de jubilación (exógena) si el número de hijos es 1. Esto provoca que el individuo representativo perciba que tener hijos es una fuente de mayores pensiones futuras y adaptará su comportamiento racional a este hecho. Por otra parte, el sector público sigue manteniendo un sistema de reparto por lo que la condición de equilibrio financiero del sistema debe mantenerse:

$$\bar{\mu}_{t+1} = \frac{\tau w_{t+1} h(e_t)}{\pi}.$$

Las condiciones de equilibrio competitivo, con las mismas formas funcionales asumidas en el modelo básico, son:

$$\frac{1}{c_t} = \frac{\beta A \alpha k_{t+1}^{\alpha-1}}{d_{t+1}} ; \quad \frac{1}{c_t} = \frac{\delta n_t^{-\varepsilon}}{e_t} ;$$

$$\boxed{\frac{e_t + b \sigma A (1 - \alpha) e_{t-1} n_t^{\sigma-1} k_t^\alpha}{c_t} = \frac{\beta \tau A (1 - \alpha) e_t k_{t+1}^\alpha}{d_{t+1}} + \delta (1 - \varepsilon) n_t^{-\varepsilon} \ln(e_t)}$$

$$c_t = A(1 - \alpha)(1 - \tau - b n_t^\sigma) k_t^\alpha e_{t-1} - n_t e_t (1 + k_{t+1}) ; \quad d_{t+1} = A \left(\frac{\alpha + \tau(1 - \alpha)}{\pi} \right) n_t e_t k_{t+1}^\alpha$$

Observando la ecuación enmarcada, que es la única que ha cambiado, se aprecia que ahora una unidad marginal más de hijos proporciona utilidad adicional de dos maneras: vía mayor consumo en la vejez y vía valoración de la educación de los hijos gracias al grado de altruismo. Debido a ello, la solución de este modelo será, en general, distinta a la del modelo básico. Manipulando las ecuaciones se llega a:

$$k_{t+1} = \frac{G}{n_t^{1-\varepsilon}} \quad [9]$$

$$e_t = \frac{\delta A (1 - \alpha) (1 - \tau - b n_t^\sigma) k_t^\alpha e_{t-1}}{(1 + \delta G) n_t^\varepsilon + \delta n_t} \quad [10]$$

$$e_t \left[(1 - \varepsilon) \ln(e_t) - 1 + \frac{\tau(1 - \alpha)}{\alpha} k_{t+1} \right] n_t^{1-\sigma} = A(1 - \alpha) b \sigma k_t^\alpha e_{t-1} \quad [11']$$

Obsérvese que se mantiene la relación inversa entre la cantidad y calidad de hijos así como entre la cantidad de hijos y la relación capital físico – capital humano. Los valores de las tres variables en el estado estacionario las denotaremos por $\bar{k}, \bar{e}, \bar{n}$. Dado que la ecuación [10] coincide con la del modelo básico se llega a:

$$\bar{n} = n^*$$

$$\bar{k} = \frac{G}{\bar{n}^{1-\varepsilon}} = k^*$$

$$\bar{e} = \exp\left\{\frac{1}{1-\varepsilon} + \frac{A(1-\alpha)b\sigma\bar{k}^\alpha}{(1-\varepsilon)\bar{n}^{1-\sigma}} - \frac{\tau(1-\alpha)}{\alpha(1-\varepsilon)}\bar{k}\right\} < e^*$$

La última desigualdad es debido a que $\frac{\tau(1-\alpha)}{\alpha(1-\varepsilon)} > 0$.

Así pues, el efecto de vincular la pensión de jubilación al número de hijos en este modelo no es, en el estado estacionario, el esperado de un aumento en el número de hijos, sino que lleva a una menor inversión en educación manteniéndose constante el número de hijos. Por tanto, el capital humano es menor y también la producción agregada, el consumo per cápita y el bienestar. En el epígrafe 5 se cuantifican las soluciones en el estado estacionario así como la dinámica del equilibrio si se implanta esta reforma y se comenta cómo van interactuando todas las variables.

4.- Modelo con pensión de jubilación vinculada al gasto educativo

Si ahora se piensa más en el capital humano como fuente de crecimiento, se pasa a explicitar que el importe de la pensión de jubilación está vinculada al gasto educativo de los hijos o inversión en educación. El consumidor maximizará su función de utilidad [1] sujeto a las restricciones [2a] y:

$$d_{t+1} = s_t \frac{1+r_{t+1}}{\pi} + n_t e_t \hat{\mu}_{t+1} \quad [2b'']$$

Donde, en [2b''], $\hat{\mu}_{t+1}$ es la pensión de jubilación (exógena) si el gasto en educación es 1 unidad monetaria. Con este cambio los consumidores percibirán que dedicar recursos a la educación de los hijos supondrá mayores pensiones futuras y

adaptarán su comportamiento racional. Como el sector público sigue manteniendo un sistema de reparto debe cumplirse la ecuación de equilibrio financiero: $\hat{\mu}_{t+1} = \frac{\tau W_{t+1}}{\pi}$.

Las cinco ecuaciones de equilibrio competitivo, con las mismas formas funcionales que en los dos modelos anteriores, son:

$$\frac{1}{c_t} = \frac{\beta A \alpha k_{t+1}^{\alpha-1}}{d_{t+1}} ; \quad \boxed{\frac{1}{c_t} = \frac{\delta n_t^{-\varepsilon}}{e_t} + \frac{\beta \pi \hat{\mu}_{t+1}}{d_{t+1}}}$$

$$\frac{e_t + b \sigma A (1 - \alpha) e_{t-1} n_t^{\sigma-1} k_t^\alpha}{c_t} = \frac{\beta \tau A (1 - \alpha) e_t k_{t+1}^\alpha}{d_{t+1}} + \delta (1 - \varepsilon) n_t^{-\varepsilon} \ln(e_t)$$

$$c_t = A(1 - \alpha)(1 - \tau - b n_t^\sigma) k_t^\alpha e_{t-1} - n_t e_t (1 + k_{t+1}) ; \quad d_{t+1} = A \left(\frac{\alpha + \tau(1 - \alpha)}{\pi} \right) n_t e_t k_{t+1}^\alpha$$

La ecuación enmarcada muestra una diferencia respecto a los dos modelos anteriores en la relación de arbitraje para invertir en educación. Ahora el aumento en la utilidad derivado de dedicar una unidad monetaria adicional a educación (2º miembro) tiene dos términos, uno que valora la utilidad adicional vía grado de altruismo y otro que la valora vía mayor consumo en la vejez. Esta diferencia implicará una solución asimismo diferente para este modelo.

Manipulando las ecuaciones y tomando $D = G \frac{\tau(1 - \alpha)}{\alpha}$, se llega a:

$$k_{t+1} = \frac{G}{n_t^{1-\varepsilon} + D} \quad [9']$$

$$e_t = \frac{\delta A (1 - \alpha) (1 - \tau - b n_t^\sigma) k_t^\alpha e_{t-1} (1 + D n_t^{\varepsilon-1})}{(1 + \delta G) n_t^\varepsilon + \delta n_t + \delta D n_t^\varepsilon} \quad [10']$$

$$e_t \left[\frac{(1 - \varepsilon) \ln(e_t) - 1}{1 + D n_t^{\varepsilon-1}} \right] n_t^{1-\sigma} = A(1 - \alpha) b \sigma k_t^\alpha e_{t-1} \quad [11'']$$

Obsérvese que se mantiene la relación inversa entre la cantidad y calidad de hijos así como entre la cantidad de hijos y la relación capital físico – capital humano. En el estado estacionario, los nuevos valores de las variables los denotaremos por $\hat{k}, \hat{e}, \hat{n}$. La ecuación [10'] tras sustituir [9'] queda:

$$(1 + \delta G)n^\varepsilon + \delta n + \delta Dn^\varepsilon = \delta A(1 - \alpha)(1 - \tau - bn^\sigma)G^\alpha n^{\alpha(\varepsilon-1)}(1 + Dn^{\varepsilon-1})^{1-\alpha}$$

Ambos miembros de la ecuación que determina la cantidad de hijos son mayores que en los anteriores modelos: el primer miembro aumenta debido al término $\delta Dn^\varepsilon > 0$; y el segundo miembro debido al factor $(1 + Dn^{\varepsilon-1})^{1-\alpha} > 1$. Sin embargo, para múltiples simulaciones de valores de los parámetros siempre se ha comprobado que el segundo miembro aumenta más que el primero y, en consecuencia, el equilibrio se establecerá para un número superior de hijos, es decir, $\hat{n} > n^* = \bar{n}$. En consecuencia, este modelo implica un estado estacionario con mayor número de hijos que los dos modelos previos. También se tendrá:

$$\hat{k} = \frac{G}{\hat{n}^{1-\varepsilon} + D} < \frac{G}{\hat{n}^{1-\varepsilon}} < \frac{G}{n^{*1-\varepsilon}} = k^* = \bar{k}, \text{ dado que } D > 0 \text{ y } \varepsilon < 1.$$

$$\hat{e} = \exp\left\{\frac{1}{1-\varepsilon} + \frac{A(1-\alpha)b\sigma\hat{k}^\alpha}{(1-\varepsilon)\hat{n}^{1-\sigma}}(1 + D\hat{n}^{\varepsilon-1})\right\} > e^*.$$

De nuevo, la última desigualdad se ha establecido tras múltiples simulaciones con un amplio abanico de valores para los parámetros. Como $e^* > \bar{e}$ siempre, se llega a la conclusión que la inversión en educación por hijo es superior en este modelo a la de los otros dos en el estado estacionario.

En resumen, la comparación de la solución de equilibrio competitivo en el estado estacionario entre el modelo básico y los dos modelos reformados establece los siguientes resultados para las tres variables relevantes:

$$\hat{n} > n^* = \bar{n} ; \quad \hat{k} < k^* = \bar{k} ; \quad \hat{e} > e^* > \bar{e}$$

Así pues, el efecto de vincular la pensión de jubilación al gasto en educación que realizan los padres origina un estado estacionario con mayor inversión tanto en cantidad de hijos (\hat{n}) como en calidad de hijos (\hat{e}) respecto al modelo básico (n^* y e^* , respectivamente) y respecto al modelo en el que la pensión de jubilación sólo se vincula al número de hijos (\bar{n} y \bar{e} , respectivamente). Al mismo tiempo, la relación capital físico – capital humano es menor y, por tanto, también la producción y el salario por unidad de capital humano; aunque, como cada individuo está dotado de un mayor nivel de capital humano, el producto y el salario por individuo normalmente será mayor y también el consumo, el ahorro y el bienestar del individuo representativo. La cuantificación de la solución en el estado estacionario y la dinámica tras implantar esta reforma aparece en la sección 5.

Por tanto, con un modelo de equilibrio en el que la educación es endógena, no es suficiente con interiorizar en el cálculo de la pensión la inversión en hijos como se destaca en Abío y otros (2004) y Abío y Patxot (2005), sino que sería necesario hacer lo mismo con la inversión en su educación. En esta línea se mueve el reciente trabajo de Meier y Wrede (2005), en el que los agentes son heterogéneos en cuanto a número de hijos y productividad. Estos autores proponen una fórmula de cálculo de la pensión con cuatro componentes: una constante, una que dependa del salario propio, otra que dependa del número de hijos y otra que dependa de los salarios de los hijos (esta última estará un función de la inversión en educación).

5.- Calibración de los modelos: solución numérica en el estado estacionario, análisis de sensibilidad y transición dinámica con cada reforma

Solución numérica

Los modelos se resuelven numéricamente tomando valores para los parámetros que sean compatibles con los habituales en la literatura y que repliquen de forma aproximada algunos ratios macroeconómicos del caso español. En el problema del consumidor y en la función de producción se eligen los valores:

- $\pi = 0,3$; para aproximar a la relación jubilados/ocupados de 2002.
- $\beta = 1,7$; para que el término $\beta\pi$ sea 0,5 que es lo más habitual en la literatura cuando no se considera probabilidad de supervivencia.
- $\delta = 0,3$ y $\varepsilon = 0,25$; de acuerdo con Becker y otros (1990).
- $b = 0,3$ y $\sigma = 0,9$; según se desprende de la Encuesta Continua de Presupuestos Familiares de 2003 al comparar el gasto medio por hogar de una pareja sin hijos, con un hijo y con dos hijos.
- $\alpha = 0,3$; como valor más habitual en la literatura.
- $\tau = 0,1$; para que el volumen de pensiones sobre la producción, que es igual a $\tau(1-\alpha)$, sea similar al gasto en protección social de la función vejez sobre el PIB español (6,5% en 2002).
- $A = 12,351$; para que la solución óptima para el número de hijos en el modelo básico sea $n^*=1$.

La solución de equilibrio estacionario para las variables partiendo de un nivel de población adulta normalizado a 1 aparece en la Tabla 1.

Tabla 1.- Soluciones en el equilibrio estacionario				
		Modelo básico	Con pensión vinculada al número de hijos	Con pensión vinculada al gasto educativo
Variables relevantes	n	1	1	1,12
	k	1,378	1,378	0,976
	e	116,8	76,1	198,1
	c	389,3	253,5	524,8
Variables para el consumidor representativo	s	161	104,8	217
	d	1958,7	1275,7	3362,2
	μ	370,6	241,3	636,1
	K	161	104,8	217
Variables agregadas	H	116,8	76,1	222,3
	Y	1588,2	1034,3	2726
Precios de los factores productivos	w	9,52	9,52	8,58
	r	1,96	1,96	2,77
	C/Y	82,5%	82,5%	81,9%
Ratios relevantes	S/Y	10,1%	10,1%	8,9%
	Educ./ Y	7,4%	7,4%	9,2%
	Pens./ Y	7%	7%	7%
Bienestar	U	11,258	10,482	12,135

La comparación entre ambas soluciones de la Tabla 1 se refiere únicamente al estado estacionario. Se observa, ahora en términos cuantitativos, cómo vincular la pensión al número de hijos no implica una situación estacionaria mejor, sino que el gasto educativo es menor y con él también son menores la producción, el consumo, el ahorro y el bienestar. La última columna muestra la situación estacionaria del modelo que vincula la pensión al gasto educativo, observándose mayor número de hijos y mayor inversión en educación con lo que el capital humano, la producción, el consumo y el bienestar son mayores.

Análisis de sensibilidad

Otro análisis numérico posible es el de sensibilidad. Se trata de medir cómo cambian las variables relevantes del modelo ante cambios en los parámetros con el objetivo de orientar medidas de política económica (si el parámetro es un instrumento de política económica) o de anticipar efectos futuros (si el parámetro es

exógeno a la política económica). La medida utilizada en este análisis es la elasticidad de cada variable en el estado estacionario respecto a cada parámetro. Los cálculos se han realizado únicamente sobre el modelo básico, en el que la pensión es exógena, y los resultados se muestran en la Tabla 2. Cada valor representa el porcentaje de variación de cada variable (por columnas) ante variaciones de un 1% en el valor anteriormente asumido de cada parámetro (por filas).

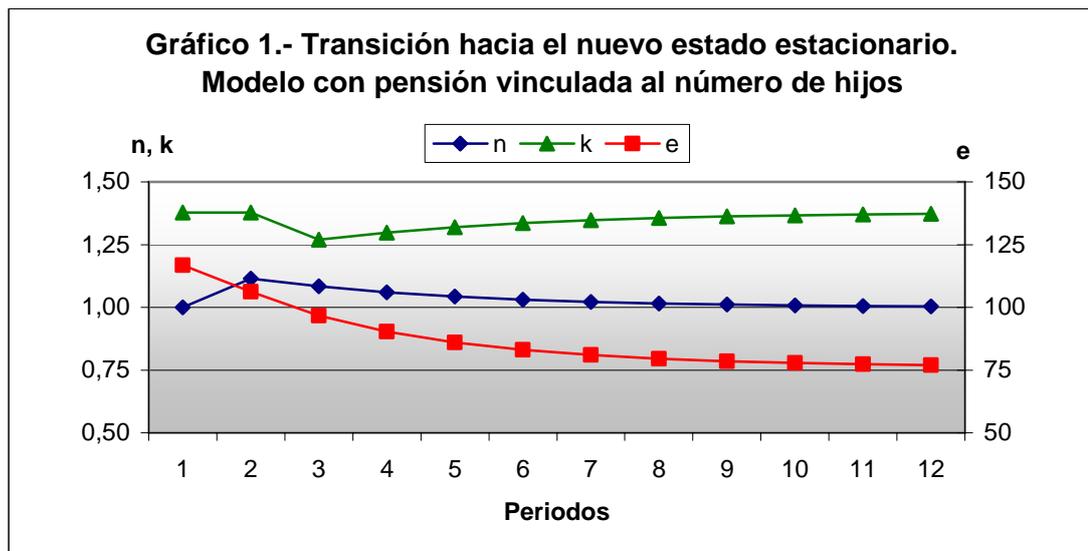
Parámetros	Variables			
	<i>n</i>	<i>e</i>	<i>k</i>	<i>U</i>
<i>A</i>	0,9	2,4	-0,7	0,6
<i>α</i>	-0,3	-0,5	0,5	-0,1
<i>π ó β</i>	0,1	1,0	1,0	0,5
<i>τ</i>	-0,2	-0,01	-0,1	-0,02
<i>δ</i>	0,5	-1,6	-1,4	-0,2
<i>ε</i>	0,0	1,6	0,0	0,3
<i>b</i>	-0,5	4,0	0,4	0,6
<i>σ</i>	0,0	3,5	0,0	0,6

Se deduce, como ejemplo de parámetro exógeno a la política económica, que una mayor esperanza de vida (parámetro π) dará lugar a un nuevo estado estacionario con mayor número de hijos, mayor inversión en educación, mayor relación capital físico – capital humano y mayor bienestar. El tipo de cotización a la seguridad social (parámetro τ) es un ejemplo de parámetro controlable por la política económica y observando que tiene efectos inversos sobre las cuatro variables se aconsejaría su reducción. En concreto, un mayor tamaño de la seguridad social reduciría los recursos disponibles para tener hijos y educarlos. Esta relación inversa entre seguridad social y fertilidad se ha obtenido también en algunos estudios empíricos (Cigno y otros, 2000) y en modelos teóricos de fertilidad (Cigno, 1993) con altruismo de hijos a padres.

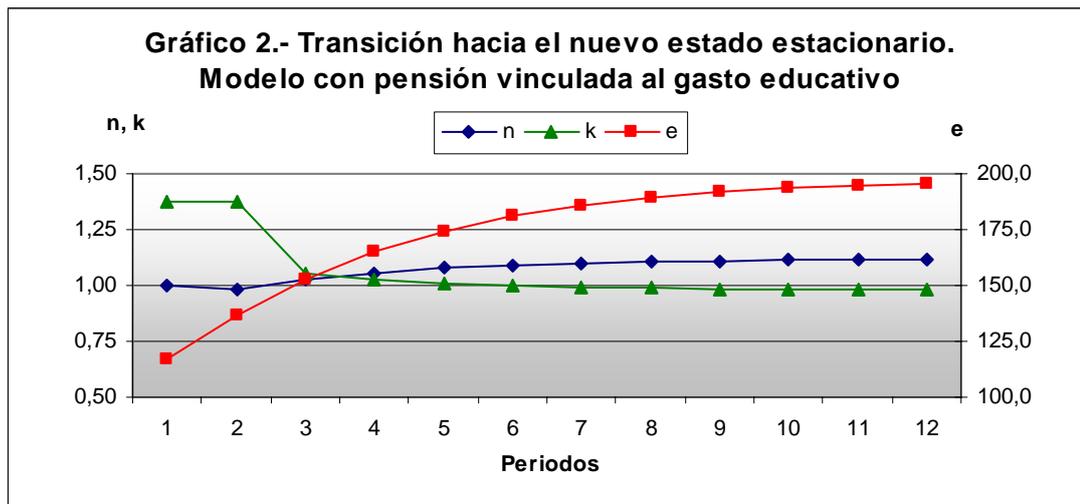
Los parámetros ε y σ , que parecen tener un efecto neutral sobre n y k , sí que afectan en realidad a estas variables si se plantean equilibrios estacionarios compatibles con un valor de n distinto de 1, aunque son efectos de poca magnitud. El análisis de sensibilidad de los parámetros sobre los modelos reformados presenta resultados muy similares.

Transición dinámica

En cuanto a la transición desde el equilibrio estacionario del modelo básico al equilibrio estacionario correspondiente a cada modelo reformado, se observa en ambos casos estabilidad dinámica, es decir, tendencia a largo plazo hacia el nuevo estado estacionario tras implantar cada reforma. Esta estabilidad dinámica, lógicamente, se ha constatado en términos numéricos para un amplio rango de valores de los parámetros ya que los sistemas de ecuaciones [9], [10] y [11] del modelo básico y de los dos modelos reformados no son manejables analíticamente. Los gráficos 1 y 2 muestran la evolución de las variables relevantes desde el equilibrio estacionario del modelo básico hacia el equilibrio estacionario tras cada una de las dos reformas planteadas, con los valores de los parámetros asumidos anteriormente.



Así pues, si se vincula la pensión al número de hijos (gráfico 1), durante el primer periodo tras la reforma (periodo 2) aumenta el número de hijos y disminuye el gasto en educación, existiendo intercambio entre cantidad y calidad de hijos. Con mayor número de hijos se dedican más recursos a su cuidado y disminuye el ahorro y el consumo. La Economía utiliza relativamente más capital humano y menos capital físico que antes, lo que lleva a menores salarios y mayores tipos de interés. La pensión y el bienestar de esta primera generación puede incluso aumentar por el efecto combinado sobre todas las variables pero en el siguiente periodo, con menores salarios, el número de hijos disminuirá y también lo seguirá haciendo el gasto en educación. A largo plazo, como se ve en el Gráfico 1, las variables k y n vuelven a su nivel inicial mientras que e tiende al nuevo valor estacionario inferior al inicial.



Si se vincula la pensión al gasto educativo realizado por cada adulto (gráfico 2), la primera generación sufre una pérdida de bienestar al dedicar más recursos a la educación y menos al consumo en la etapa adulta y al ahorro, pese a un mayor consumo en la vejez. Asimismo se produce una ligera disminución en el número de hijos en el primer periodo tras la reforma, observándose intercambio entre cantidad y calidad de hijos. Este efecto es transitorio porque en el siguiente periodo la generación adulta dispone de mayor capital humano por individuo con lo que la Economía es más productiva y se dispone de más recursos para tener hijos, para consumir y para ahorrar, encaminándose hacia un nuevo equilibrio estacionario con mayor inversión en educación y mayores tasas de fertilidad y crecimiento económico.

5.- Conclusiones

El objetivo propuesto era analizar los efectos económicos de vincular la pensión de jubilación al número de hijos o al gasto educativo. Los resultados obtenidos muestran que si se tiene sólo en cuenta el número de hijos en el cálculo de la pensión pero no el nivel de educación proporcionado, el aumento en la fertilidad

será sólo transitorio mientras que la inversión en educación cae de forma permanente. A largo plazo el número de hijos vuelve al nivel existente antes de introducir la reforma pero ahora con un nivel educativo menor, deprimiendo el capital humano agregado de la Economía. Esto no contradice los resultados de otros trabajos (Abío y otros, 2004; Abío y Patxot, 2005) ya que los modelos teóricos de base utilizados son distintos, pero sí que acota su validez al caso en que la educación no sea endógena en el modelo.

Si se incorpora también la educación proporcionada a los hijos en el cálculo de la pensión de jubilación, los efectos económicos resultantes son más satisfactorios ya que se consigue interiorizar el efecto positivo de la educación, es decir, de la productividad de los hijos, llevando a la Economía a mayores niveles de capital humano agregado y a los individuos a mayores niveles de bienestar, aunque la primera generación tras la reforma saldría perjudicada.

Las implicaciones de política económica se limitan a constatar una vez más la importancia del capital humano (educación) en el diseño de medidas encaminadas a favorecer el crecimiento. Es decir, hay que tener en cuenta que toda política de fertilidad no debe quedarse ahí sino que es necesario complementarla con inversión en educación para que los efectos sobre la producción, el consumo y el bienestar sean realmente efectivos.

Bibliografía

- Abío, G. y Patxot, C. (1999): El coste de los hijos: un replanteamiento de los efectos sobre el bienestar de una transición demográfica en un sistema de pensiones de reparto. Cuadernos Económicos del I.C.E., 64, 189-206.
- Abío, G.; Mahieu, G. y Patxot, C. (2004): On the Optimality of PAYG Pension Systems in an Endogenous Fertility Setting. *Journal of Pension Economics and Finance*, 3-1, 35-62.
- Abío, G. y Patxot, C. (2005): Sistemas de pensiones y fecundidad. Un enfoque de generaciones solapadas. Documento de trabajo nº 3. Fundación BBVA.
- Barro, R.J. y Sala i Martín, X. (1995): *Economic Growth*. Mc Graw Hill.
- Becker, G.S.; Murphy, K.M. y Tamura, R. (1990): Human Capital, Fertility, and Economic Growth. *Journal of Political Economy*, 98-5, 12-37.
- Blackburn, K. y Cipriani, G.P. (1998): Endogenous fertility, mortality and growth. *Journal of Population Economics*, 11, 517-534.
- Boucekkine, R. ; de la Croix, D. y Licandro, O. (2002): Vintage human capital, demographic trends, and endogenous growth. *Journal of Economic Theory*, 104, 340-345.
- Cigno, A. (1993): Intergenerational transfers without altruism. *European Journal of Political Economy*, 9, 505-518.
- Cigno, A., Casolaro, L. y Rosati, F.C. (2000): The role of social security in household decisions: VAR estimates of saving and fertility behaviour in Germany. CESifo Working Paper nº 394.
- Diamond, P.A. (1965): National debt in a neoclassical growth model. *American Economic Review*, 55, 1126-1150.
- Hondroyiannis, G. y Papapetrou, E. (2002): Demographic transition and economic growth: Empirical evidence from Greece. *Journal of Population Economics*, 15, 221-242.
- Hondroyiannis, G. y Papapetrou, E. (2005): Fertility and output in Europe: new evidence from panel cointegration analysis. *Journal of Policy Modeling*, 27, 143-156.
- Kalemli-Ozcan, S. (2003): A stochastic model of mortality, fertility, and human capital investment. *Journal of Development Economics*, 70, 103-118.
- López Díaz, J. y Ridruejo, Z.J. (2003): Pensiones, crecimiento y envejecimiento poblacional. *Investigaciones Económicas*, 27-2, 343-367.
- McNown, R. (2003): Cointegration modelling of fertility in the United States. *Mathematical Population Studies*, 10, 99-126.
- McNown, R. y Rajbhandary, S. (2003): Time series analysis of fertility and female labor market behaviour. *Journal of Population Economics*, 16, 501-523.
- Meier, V. y Wrede, M. (2005): Pension, fertility, and education. CESifo Working Paper nº 1521.

- Morand, O.F. (1999): Endogenous fertility, income distribution, and growth. *Journal of Economic Growth*, 4, 331-349.
- Pecchenino, R.A. y Utendorf, K.R. (1999): Social security, social welfare and the aging population. *Journal of Population Economics*, 12, 607-623.
- Peters (1995): Public pensions, family allowances and endogenous demographic change. *Journal of Population Economics*, 8, 161-183.
- Samuelson, P.A. (1958): An exact consumption-loan model of interest with or without the social contrivance of money. *The journal of Political Economy*, 66-6, 467-482.
- Sinn, H.W. (2001): The value of children and immigrants in a pay-as-you-go pension system: a proposal for a partial transition to a funded system. *Ifo Studien*, 47-1, 77-94.
- Van Groezen, B.; Leers, T. y Meijdam, L. (2003): Social security and endogenous fertility: pensions and child allowances as siamese twins. *Journal of Public Economics*, 87, 233-251.
- Wigger, B.U. (1999): Pay-as-you-go financed public pensions in a model of endogenous growth and fertility. *Journal of Population Economics*, 12, 625-640.
- Zhang, J. y Zhang, J. (2001): Bequest motives, social security, and economic growth. *Economic Inquiry*, 39-3, 453-466.

Anexo

Para que las condiciones de primer orden del problema del consumidor del modelo básico lleven a un máximo global único debe cumplirse alguna condición suficiente. Lo más habitual es establecerla en términos de la estricta concavidad de la función de utilidad, aunque existen otros requisitos menos fuertes. Además, asumiendo que dicha función sea de clase C^2 , esta condición suficiente se reduce a exigir que su matriz hessiana represente una forma cuadrática definida negativa.

Para construir la matriz hessiana hay que tener en cuenta que las restricciones [2] se han sustituido en la función de utilidad [1], es decir, la función de utilidad es una función compuesta donde las variables c_t y d_{t+1} dependen a su vez de las tres variables s_t , e_t y n_t .

Las primeras derivadas de la función de utilidad o vector gradiente, eliminando los subíndices cuando no dan lugar a confusión, son:

$$\nabla U = [-u'(c) + \beta(1+r)u'(d), \quad -nu'(c) + a(n)nu'(e), \quad c_n u'(c) + (a'(n)n + a(n))u'(e)]$$

Mientras que la hessiana es:

$$H = \begin{pmatrix} u''(c) + \frac{\beta(1+r)^2 u''(d)}{\pi} & nu''(c) & -c_n u''(c) \\ nu''(c) & n^2 u''(c) + a(n)nu''(e) & H_{23} \\ -c_n u''(c) & H_{32} & H_{33} \end{pmatrix}$$

donde:

$$H_{23} = H_{32} = -nu''(c)c_n - u'(c) + (a'(n)n + a(n))u'(e)$$

$$H_{33} = c_{nn} u'(c) + c_n^2 u''(c) + (a''(n)n + 2a'(n))u'(e)$$

$$c_n = \frac{\partial c}{\partial n} = -we_{t-1}b\sigma n^{\sigma-1} - e$$

$$c_{nn} = \frac{\partial^2 c}{\partial n^2} = -we_{t-1}b\sigma(\sigma-1)n^{\sigma-2}$$

La condición suficiente para que la hessiana represente a una forma cuadrática definida negativa es que los menores principales conducentes alternen su signo empezando por negativo, es decir:

$$1. A_1 = u''(c) + \frac{\beta(1+r)^2 u''(d)}{\pi} < 0$$

$$2. A_2 = \begin{vmatrix} u''(c) + \frac{\beta(1+r)^2 u''(d)}{\pi} & nu''(c) \\ nu''(c) & n^2 u''(c) + a(n)nu''(e) \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{\beta(1+r)^2 u''(d)}{\pi} [n^2 u''(c) + a(n)nu''(e)] + u''(c)a(n)nu''(e) > 0$$

$$3. A_3 = |H| < 0$$

Las condiciones 1 y 2 se cumplen si se asume que las funciones simples de utilidad $u(c_t)$, $u(d_{t+1})$ y $u(e_t)$ son estrictamente cóncavas.

Por tanto, con este análisis previo se tiene demostrada la siguiente proposición:

“Una condición suficiente que asegura la estricta concavidad de la función de utilidad del consumidor y, por tanto, garantiza que las condiciones de primer orden del problema del consumidor dan lugar a un máximo global único es que las funciones $u(c_t)$, $u(d_{t+1})$ y $u(e_t)$ sean estrictamente cóncavas y que $|H| < 0$ ”

En la resolución analítica se han tomado formas funcionales logarítmicas para las funciones $u(c_t)$, $u(d_{t+1})$ y $u(e_t)$ y, por tanto, estrictamente cóncavas. Mientras que al ser el signo del determinante de la hessiana ambiguo, obliga a limitar la globalidad de la solución al subdominio de valores (s_t, e_t, n_t) para los que $|H| < 0$. En la solución numérica obtenida en el epígrafe 5 se ha comprobado que efectivamente el determinante de la hessiana es negativo lo que asegura al menos que dicha solución es máximo local.

En los dos modelos reformados el análisis es similar, aunque hay que recalcular la matriz hessiana al cambiar la segunda restricción del problema del consumidor. La globalidad de la solución queda garantizada, en general, en un subdominio (s_t, e_t, n_t) distinto del anterior. De nuevo, se ha comprobado que para la solución numérica del epígrafe 5 la función de utilidad del problema del consumidor es estrictamente cóncava localmente, asegurando al menos que es un máximo local.

FUNDACIÓN DE LAS CAJAS DE AHORROS

DOCUMENTOS DE TRABAJO

Últimos números publicados

- 159/2000 Participación privada en la construcción y explotación de carreteras de peaje
Ginés de Rus, Manuel Romero y Lourdes Trujillo
- 160/2000 Errores y posibles soluciones en la aplicación del *Value at Risk*
Mariano González Sánchez
- 161/2000 Tax neutrality on saving assets. The spanish case before and after the tax reform
Cristina Ruza y de Paz-Curbera
- 162/2000 Private rates of return to human capital in Spain: new evidence
F. Barceinas, J. Oliver-Alonso, J.L. Raymond y J.L. Roig-Sabaté
- 163/2000 El control interno del riesgo. Una propuesta de sistema de límites
riesgo neutral
Mariano González Sánchez
- 164/2001 La evolución de las políticas de gasto de las Administraciones Públicas en los años 90
Alfonso Utrilla de la Hoz y Carmen Pérez Esparrells
- 165/2001 Bank cost efficiency and output specification
Emili Tortosa-Ausina
- 166/2001 Recent trends in Spanish income distribution: A robust picture of falling income inequality
Josep Oliver-Alonso, Xavier Ramos y José Luis Raymond-Bara
- 167/2001 Efectos redistributivos y sobre el bienestar social del tratamiento de las cargas familiares en
el nuevo IRPF
Nuria Badenes Plá, Julio López Laborda, Jorge Onrubia Fernández
- 168/2001 The Effects of Bank Debt on Financial Structure of Small and Medium Firms in some Euro-
pean Countries
Mónica Melle-Hernández
- 169/2001 La política de cohesión de la UE ampliada: la perspectiva de España
Ismael Sanz Labrador
- 170/2002 Riesgo de liquidez de Mercado
Mariano González Sánchez
- 171/2002 Los costes de administración para el afiliado en los sistemas de pensiones basados en cuentas
de capitalización individual: medida y comparación internacional.
José Enrique Devesa Carpio, Rosa Rodríguez Barrera, Carlos Vidal Meliá
- 172/2002 La encuesta continua de presupuestos familiares (1985-1996): descripción, representatividad
y propuestas de metodología para la explotación de la información de los ingresos y el gasto.
Llorenç Pou, Joaquín Alegre
- 173/2002 Modelos paramétricos y no paramétricos en problemas de concesión de tarjetas de credito.
Rosa Puertas, María Bonilla, Ignacio Olmeda

- 174/2002 Mercado único, comercio intra-industrial y costes de ajuste en las manufacturas españolas.
José Vicente Blanes Cristóbal
- 175/2003 La Administración tributaria en España. Un análisis de la gestión a través de los ingresos y de los gastos.
Juan de Dios Jiménez Aguilera, Pedro Enrique Barrilao González
- 176/2003 The Falling Share of Cash Payments in Spain.
Santiago Carbó Valverde, Rafael López del Paso, David B. Humphrey
Publicado en "Moneda y Crédito" nº 217, pags. 167-189.
- 177/2003 Effects of ATMs and Electronic Payments on Banking Costs: The Spanish Case.
Santiago Carbó Valverde, Rafael López del Paso, David B. Humphrey
- 178/2003 Factors explaining the interest margin in the banking sectors of the European Union.
Joaquín Maudos y Juan Fernández Guevara
- 179/2003 Los planes de stock options para directivos y consejeros y su valoración por el mercado de valores en España.
Mónica Melle Hernández
- 180/2003 Ownership and Performance in Europe and US Banking – A comparison of Commercial, Co-operative & Savings Banks.
Yener Altunbas, Santiago Carbó y Phil Molyneux
- 181/2003 The Euro effect on the integration of the European stock markets.
Mónica Melle Hernández
- 182/2004 In search of complementarity in the innovation strategy: international R&D and external knowledge acquisition.
Bruno Cassiman, Reinhilde Veugelers
- 183/2004 Fijación de precios en el sector público: una aplicación para el servicio municipal de suministro de agua.
M^a Ángeles García Valiñas
- 184/2004 Estimación de la economía sumergida en España: un modelo estructural de variables latentes.
Ángel Alañón Pardo, Miguel Gómez de Antonio
- 185/2004 Causas políticas y consecuencias sociales de la corrupción.
Joan Oriol Prats Cabrera
- 186/2004 Loan bankers' decisions and sensitivity to the audit report using the belief revision model.
Andrés Guiral Contreras and José A. Gonzalo Angulo
- 187/2004 El modelo de Black, Derman y Toy en la práctica. Aplicación al mercado español.
Marta Tolentino García-Abadillo y Antonio Díaz Pérez
- 188/2004 Does market competition make banks perform well?.
Mónica Melle
- 189/2004 Efficiency differences among banks: external, technical, internal, and managerial
Santiago Carbó Valverde, David B. Humphrey y Rafael López del Paso

- 190/2004 Una aproximación al análisis de los costes de la esquizofrenia en España: los modelos jerárquicos bayesianos
F. J. Vázquez-Polo, M. A. Negrín, J. M. Cavasés, E. Sánchez y grupo RIRAG
- 191/2004 Environmental proactivity and business performance: an empirical analysis
Javier González-Benito y Óscar González-Benito
- 192/2004 Economic risk to beneficiaries in notional defined contribution accounts (NDCs)
Carlos Vidal-Meliá, Inmaculada Domínguez-Fabian y José Enrique Devesa-Carpio
- 193/2004 Sources of efficiency gains in port reform: non parametric malmquist decomposition tfp index for Mexico
Antonio Estache, Beatriz Tovar de la Fé y Lourdes Trujillo
- 194/2004 Persistencia de resultados en los fondos de inversión españoles
Alfredo Ciriaco Fernández y Rafael Santamaría Aquilué
- 195/2005 El modelo de revisión de creencias como aproximación psicológica a la formación del juicio del auditor sobre la gestión continuada
Andrés Guiral Contreras y Francisco Esteso Sánchez
- 196/2005 La nueva financiación sanitaria en España: descentralización y prospectiva
David Cantarero Prieto
- 197/2005 A cointegration analysis of the Long-Run supply response of Spanish agriculture to the common agricultural policy
José A. Mendez, Ricardo Mora y Carlos San Juan
- 198/2005 ¿Refleja la estructura temporal de los tipos de interés del mercado español preferencia por la liquidez?
Magdalena Massot Perelló y Juan M. Nave
- 199/2005 Análisis de impacto de los Fondos Estructurales Europeos recibidos por una economía regional: Un enfoque a través de Matrices de Contabilidad Social
M. Carmen Lima y M. Alejandro Cardenete
- 200/2005 Does the development of non-cash payments affect monetary policy transmission?
Santiago Carbó Valverde y Rafael López del Paso
- 201/2005 Firm and time varying technical and allocative efficiency: an application for port cargo handling firms
Ana Rodríguez-Álvarez, Beatriz Tovar de la Fe y Lourdes Trujillo
- 202/2005 Contractual complexity in strategic alliances
Jeffrey J. Reuer y Africa Ariño
- 203/2005 Factores determinantes de la evolución del empleo en las empresas adquiridas por opa
Nuria Alcalde Fradejas y Inés Pérez-Soba Aguilar
- 204/2005 Nonlinear Forecasting in Economics: a comparison between Comprehension Approach versus Learning Approach. An Application to Spanish Time Series
Elena Olmedo, Juan M. Valderas, Ricardo Gimeno and Lorenzo Escot

- 205/2005 Precio de la tierra con presión urbana: un modelo para España
Esther Decimavilla, Carlos San Juan y Stefan Sperlich
- 206/2005 Interregional migration in Spain: a semiparametric analysis
Adolfo Maza y José Villaverde
- 207/2005 Productivity growth in European banking
Carmen Murillo-Melchor, José Manuel Pastor y Emili Tortosa-Ausina
- 208/2005 Explaining Bank Cost Efficiency in Europe: Environmental and Productivity Influences.
Santiago Carbó Valverde, David B. Humphrey y Rafael López del Paso
- 209/2005 La elasticidad de sustitución intertemporal con preferencias no separables intratemporalmente: los casos de Alemania, España y Francia.
Elena Márquez de la Cruz, Ana R. Martínez Cañete y Inés Pérez-Soba Aguilar
- 210/2005 Contribución de los efectos tamaño, book-to-market y momentum a la valoración de activos: el caso español.
Begoña Font-Belaire y Alfredo Juan Grau-Grau
- 211/2005 Permanent income, convergence and inequality among countries
José M. Pastor and Lorenzo Serrano
- 212/2005 The Latin Model of Welfare: Do 'Insertion Contracts' Reduce Long-Term Dependence?
Luis Ayala and Magdalena Rodríguez
- 213/2005 The effect of geographic expansion on the productivity of Spanish savings banks
Manuel Illueca, José M. Pastor and Emili Tortosa-Ausina
- 214/2005 Dynamic network interconnection under consumer switching costs
Ángel Luis López Rodríguez
- 215/2005 La influencia del entorno socioeconómico en la realización de estudios universitarios: una aproximación al caso español en la década de los noventa
Marta Rahona López
- 216/2005 The valuation of spanish ipos: efficiency analysis
Susana Álvarez Otero
- 217/2005 On the generation of a regular multi-input multi-output technology using parametric output distance functions
Sergio Perelman and Daniel Santin
- 218/2005 La gobernanza de los procesos parlamentarios: la organización industrial del congreso de los diputados en España
Gonzalo Caballero Miguez
- 219/2005 Determinants of bank market structure: Efficiency and political economy variables
Francisco González
- 220/2005 Agresividad de las órdenes introducidas en el mercado español: estrategias, determinantes y medidas de performance
David Abad Díaz

- 221/2005 Tendencia post-anuncio de resultados contables: evidencia para el mercado español
Carlos Forner Rodríguez, Joaquín Marhuenda Fructuoso y Sonia Sanabria García
- 222/2005 Human capital accumulation and geography: empirical evidence in the European Union
Jesús López-Rodríguez, J. Andrés Faña y Jose Lopez Rodríguez
- 223/2005 Auditors' Forecasting in Going Concern Decisions: Framing, Confidence and Information Processing
Waymond Rodgers and Andrés Guiral
- 224/2005 The effect of Structural Fund spending on the Galician region: an assessment of the 1994-1999 and 2000-2006 Galician CSFs
José Ramón Cancelo de la Torre, J. Andrés Faña and Jesús López-Rodríguez
- 225/2005 The effects of ownership structure and board composition on the audit committee activity: Spanish evidence
Carlos Fernández Méndez and Rubén Arrondo García
- 226/2005 Cross-country determinants of bank income smoothing by managing loan loss provisions
Ana Rosa Fonseca and Francisco González
- 227/2005 Incumplimiento fiscal en el irpf (1993-2000): un análisis de sus factores determinantes
Alejandro Estellér Moré
- 228/2005 Region versus Industry effects: volatility transmission
Pilar Soriano Felipe and Francisco J. Climent Diranzo
- 229/2005 Concurrent Engineering: The Moderating Effect Of Uncertainty On New Product Development Success
Daniel Vázquez-Bustelo and Sandra Valle
- 230/2005 On zero lower bound traps: a framework for the analysis of monetary policy in the 'age' of central banks
Alfonso Palacio-Vera
- 231/2005 Reconciling Sustainability and Discounting in Cost Benefit Analysis: a methodological proposal
M. Carmen Almansa Sáez and Javier Calatrava Requena
- 232/2005 Can The Excess Of Liquidity Affect The Effectiveness Of The European Monetary Policy?
Santiago Carbó Valverde and Rafael López del Paso
- 233/2005 Inheritance Taxes In The Eu Fiscal Systems: The Present Situation And Future Perspectives.
Miguel Angel Barberán Lahuerta
- 234/2006 Bank Ownership And Informativeness Of Earnings.
V́ctor M. González
- 235/2006 Developing A Predictive Method: A Comparative Study Of The Partial Least Squares Vs Maximum Likelihood Techniques.
Waymond Rodgers, Paul Pavlou and Andres Guiral.
- 236/2006 Using Compromise Programming for Macroeconomic Policy Making in a General Equilibrium Framework: Theory and Application to the Spanish Economy.
Francisco J. André, M. Alejandro Cardenete y Carlos Romero.

- 237/2006 Bank Market Power And Sme Financing Constraints.
Santiago Carbó-Valverde, Francisco Rodríguez-Fernández y Gregory F. Udell.
- 238/2006 Trade Effects Of Monetary Agreements: Evidence For Oecd Countries.
Salvador Gil-Pareja, Rafael Llorca-Vivero y José Antonio Martínez-Serrano.
- 239/2006 The Quality Of Institutions: A Genetic Programming Approach.
Marcos Álvarez-Díaz y Gonzalo Caballero Miguez.
- 240/2006 La interacción entre el éxito competitivo y las condiciones del mercado doméstico como determinantes de la decisión de exportación en las Pymes.
Francisco García Pérez.
- 241/2006 Una estimación de la depreciación del capital humano por sectores, por ocupación y en el tiempo.
Inés P. Murillo.
- 242/2006 Consumption And Leisure Externalities, Economic Growth And Equilibrium Efficiency.
Manuel A. Gómez.
- 243/2006 Measuring efficiency in education: an analysis of different approaches for incorporating non-discretionary inputs.
Jose Manuel Cordero-Ferrera, Francisco Pedraja-Chaparro y Javier Salinas-Jiménez
- 244/2006 Did The European Exchange-Rate Mechanism Contribute To The Integration Of Peripheral Countries?.
Salvador Gil-Pareja, Rafael Llorca-Vivero y José Antonio Martínez-Serrano
- 245/2006 Intergenerational Health Mobility: An Empirical Approach Based On The Echp.
Marta Pascual and David Cantarero
- 246/2006 Measurement and analysis of the Spanish Stock Exchange using the Lyapunov exponent with digital technology.
Salvador Rojí Ferrari and Ana Gonzalez Marcos
- 247/2006 Testing For Structural Breaks In Variance With additive Outliers And Measurement Errors.
Paulo M.M. Rodrigues and Antonio Rubia
- 248/2006 The Cost Of Market Power In Banking: Social Welfare Loss Vs. Cost Inefficiency.
Joaquín Maudos and Juan Fernández de Guevara
- 249/2006 Elasticidades de largo plazo de la demanda de vivienda: evidencia para España (1885-2000).
Desiderio Romero Jordán, José Félix Sanz Sanz y César Pérez López
- 250/2006 Regional Income Disparities in Europe: What role for location?.
Jesús López-Rodríguez and J. Andrés Faña
- 251/2006 Funciones abreviadas de bienestar social: Una forma sencilla de simultanear la medición de la eficiencia y la equidad de las políticas de gasto público.
Nuria Badenes Plá y Daniel Santín González
- 252/2006 "The momentum effect in the Spanish stock market: Omitted risk factors or investor behaviour?".
Luis Muga and Rafael Santamaría
- 253/2006 Dinámica de precios en el mercado español de gasolina: un equilibrio de colusión tácita.
Jordi Perdiguero García

- 254/2006 Desigualdad regional en España: renta permanente versus renta corriente.
José M. Pastor, Empar Pons y Lorenzo Serrano
- 255/2006 Environmental implications of organic food preferences: an application of the impure public goods model.
Ana Maria Aldanondo-Ochoa y Carmen Almansa-Sáez
- 256/2006 Family tax credits versus family allowances when labour supply matters: Evidence for Spain.
José Felix Sanz-Sanz, Desiderio Romero-Jordán y Santiago Álvarez-García
- 257/2006 La internacionalización de la empresa manufacturera española: efectos del capital humano genérico y específico.
José López Rodríguez
- 258/2006 Evaluación de las migraciones interregionales en España, 1996-2004.
María Martínez Torres
- 259/2006 Efficiency and market power in Spanish banking.
Rolf Färe, Shawna Grosskopf y Emili Tortosa-Ausina.
- 260/2006 Asimetrías en volatilidad, beta y contagios entre las empresas grandes y pequeñas cotizadas en la bolsa española.
Helena Chuliá y Hipòlit Torró.
- 261/2006 Birth Replacement Ratios: New Measures of Period Population Replacement.
José Antonio Ortega.
- 262/2006 Accidentes de tráfico, víctimas mortales y consumo de alcohol.
José M^a Arranz y Ana I. Gil.
- 263/2006 Análisis de la Presencia de la Mujer en los Consejos de Administración de las Mil Mayores Empresas Españolas.
Ruth Mateos de Cabo, Lorenzo Escot Mangas y Ricardo Gimeno Nogués.
- 264/2006 Crisis y Reforma del Pacto de Estabilidad y Crecimiento. Las Limitaciones de la Política Económica en Europa.
Ignacio Álvarez Peralta.
- 265/2006 Have Child Tax Allowances Affected Family Size? A Microdata Study For Spain (1996-2000).
Jaime Vallés-Giménez y Anabel Zárate-Marco.
- 266/2006 Health Human Capital And The Shift From Foraging To Farming.
Paolo Rungo.
- 267/2006 Financiación Autonómica y Política de la Competencia: El Mercado de Gasolina en Canarias.
Juan Luis Jiménez y Jordi Perdiguero.
- 268/2006 El cumplimiento del Protocolo de Kyoto para los hogares españoles: el papel de la imposición sobre la energía.
Desiderio Romero-Jordán y José Félix Sanz-Sanz.
- 269/2006 Banking competition, financial dependence and economic growth
Joaquín Maudos y Juan Fernández de Guevara
- 270/2006 Efficiency, subsidies and environmental adaptation of animal farming under CAP
Werner Kleinhanß, Carmen Murillo, Carlos San Juan y Stefan Sperlich

- 271/2006 Interest Groups, Incentives to Cooperation and Decision-Making Process in the European Union
A. Garcia-Lorenzo y Jesús López-Rodríguez
- 272/2006 Riesgo asimétrico y estrategias de momentum en el mercado de valores español
Luis Muga y Rafael Santamaría
- 273/2006 Valoración de capital-riesgo en proyectos de base tecnológica e innovadora a través de la teoría de opciones reales
Gracia Rubio Martín
- 274/2006 Capital stock and unemployment: searching for the missing link
Ana Rosa Martínez-Cañete, Elena Márquez de la Cruz, Alfonso Palacio-Vera and Inés Pérez-Soba Aguilar
- 275/2006 Study of the influence of the voters' political culture on vote decision through the simulation of a political competition problem in Spain
Sagrario Lantarón, Isabel Lillo, M^a Dolores López and Javier Rodrigo
- 276/2006 Investment and growth in Europe during the Golden Age
Antonio Cubel and M^a Teresa Sanchis
- 277/2006 Efectos de vincular la pensión pública a la inversión en cantidad y calidad de hijos en un modelo de equilibrio general
Robert Meneu Gaya