LA DESIGUALDAD EN LA DISTRIBUCIÓN DE LA RENTA. MEDICIÓN Y ASPECTOS NORMATIVOS

Elena BÁRCENA-MARTÍN
Luis José IMEDIO-OLMEDO
Universidad de Málaga

Resumen

Este artículo proporciona una revisión de las distintas posibilidades existentes para evaluar la desigualdad aludiendo a la subjetividad que incorporan. Se comienza con el análisis gráfico de la desigualdad. A continuación se aborda la ordenación parcial que la curva de Lorenz induce sobre el conjunto de distribuciones de renta admisibles. Posteriormente, nos ocupamos de los índices de desigualdad más utilizados con especial referencia a la familia de índices que son consistentes con el criterio de ordenación derivado de la curva de Lorenz. La relación entre desigualdad y bienestar se aborda siguiendo el enfoque de Sen (1973), haciendo referencia al de Yaari (1987, 1988). Para terminar, enumeramos algunas aplicaciones de la medición de la desigualdad, prestando una atención especial al modo de valorar la capacidad redistributiva de un impuesto sobre la renta.

Palabras clave: desigualdad, curva de Lorenz, índices, bienestar, redistribución impositiva.

Abstract

This paper reviews the different possibilities available to assess inequality referring the subjectivity they incorporate. It begins with the graphical analysis of inequality. Then, it discuss the partial ordering that the Lorenz curve induces on the set of admissible income distributions. We then deal with the most commonly used inequality indices with special reference to the family of indices that are consistent with the ordering criterion derived from the Lorenz curve. The relationship between inequality and well-being is addressed following Sen's (1973) approach, referring to Yaari's (1987, 1988). Finally, we list some applications of the measurement of inequality, paying particular attention to the way of assessing the redistributive capacity of an income tax.

Key words: inequality, Lorenz curve, indexes, welfare, tax redistribution.

JEL classification: C10, D31, H20, I38.

I. INTRODUCCIÓN

EN el ámbito de la desigualdad económica, parte muy significativa de la desigualdad social, las cuestiones relacionadas con la distribución personal de la renta, como realidad económica observable, han ocupado, tradicionalmente, un lugar destacado. En los últimos años, en parte debido a la crisis económica, estas cuestiones han pasado a ser habituales en el debate económico, nacional e internacional, y han tenido una notable repercusión tanto en los medios de comunicación como a nivel político, logrando captar el interés de la sociedad. La desigualdad ha sido reconocida como un problema de primera magnitud por personalidades mundiales como el anterior presidente de los Estados Unidos o instituciones como el Banco Mundial y la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE).

El interés por los temas distributivos suscita la necesidad de evaluar de forma adecuada el grado de desigualdad en una sociedad. Pareto (1895) ya mostró su preocupación por una medición adecuada de la desigualdad de la renta. Kolm (1976a) señala que la desigualdad económica es una noción compleja y que su medición no está exenta de dificultades: «Muchas personas consideran la reducción de las desigualdades como un objetivo básico de la sociedad. Sin embargo, estas ideas son en gran parte poco operativas, estériles e incluso carentes de sentido, siempre y cuando lo que denominamos desigualdad no se determine con precisión. Por tanto, parece esencial valorar lo económico y construir medidas que incorporen las propiedades económicas y éticas que creemos que la desigualdad implica».

Con frecuencia, la desigualdad tiene connotaciones negativas. Como señala Atkinson (1975): «… existe la presunción de que la igualdad es deseable». En esta línea, Dagum (1993) indica que los individuos prefieren una mayor renta y riqueza a la vez que hay una preferencia social por una menor desigualdad, lo que justifica el interés por los temas redistributivos. Sin embargo, este mismo autor afirma que «… la perfecta igualdad en la distribución de la renta no es ni una meta de las sociedades políticamente organizadas, ni una condición requerida para maximizar el bienestar social». Esta frase evidencia la esencia de las medidas de desigualdad, que no valoran lo adecuado que es el reparto, sino cuán cerca o lejos se encuentra de la igualdad, entendiendo por tal la situación en la que todos los individuos de la población perciben idéntica renta.

A lo largo de la literatura se han propuesto múltiples medidas de desigualdad que incorporan variados juicios de valor. La elección entre ellas no está exenta de problemas conceptuales, y a menudo el grado de popularidad de las diferentes medidas está relacionado con la facilidad con que pueden ser entendidas por un no especialista.

El objetivo de este artículo es ofrecer una síntesis de los procedimientos habituales para la medición de la desigualdad y de la relación entre esta magnitud y el bienestar. No es una finalidad sencilla dada la abundante literatura que este tipo de análisis ha generado, desde los planteamientos clásicos centrados en el estudio de las medidas estadísticas de dispersión y, sobre todo, a partir de 1970 cuando comienza a establecerse el paradigma vigente sobre desigualdad/bienestar (1). Por ello, la única aspiración de este trabajo, excluida toda pretensión de originalidad, es la de proporcionar una visión clara de las distintas posibilidades existentes (de hecho, infinitas) para evaluar la desigualdad haciendo referencia a la subjetividad que incorporan.

Cuando, en un momento determinado, se trata de medir el grado de dispersión en la renta de una sociedad lo habitual es utilizar uno o varios índices de desigualdad, cada uno de los cuales incorpora su propio criterio al resumir en un número real la información contenida en la distribución. De ahí que cada índice asigne, en general, una magnitud diferente. Del mismo modo, al ordenar dos o más distribuciones, según sus niveles de desigualdad, la ordenación obtenida puede estar condicionada por el indicador utilizado. Esta disparidad tiene lugar porque cada índice valora de forma diferente la desigualdad en los diferentes tramos de la distribución.

Como consecuencia de lo anterior es interesante disponer de condiciones que aseguren idénticas ordenaciones de las distribuciones objeto de estudio para un extenso conjunto de índices de desigualdad (equivalencia ordinal). Estas condiciones se obtienen estableciendo comparaciones directas entre los vectores de rentas, sin condensar la información que incorporan en un valor numérico, a través de relaciones de dominancia de distinta naturaleza. Con este tipo de procedimientos se consiguen resultados robustos, pero a cambio de que existan pares de distribuciones no comparables y, por tanto, no poder generar ordenaciones completas en el conjunto de distribuciones de renta admisibles (D). Es evidente que los índices de desigualdad, aunque den lugar a ordenaciones dispares, proporcionan una ordenación completa al estar comparando números reales a través del orden total inducido por la relación «menor o igual que».

En este trabajo la primera aproximación a la medición de la desigualdad se realiza de forma gráfica, sobre todo a través de la curva de Lorenz (L) y de la ordenación parcial que esta curva induce sobre D. A continuación, nos ocuparemos de los índices de desigualdad más utilizados con especial referencia a la familia constituida por aquellos que son consistentes con el criterio de ordenación derivado de la curva L. Se trata de una familia muy amplia de medidas ordinalmente equivalentes, bajo determinadas condiciones, que incluye a las de uso más frecuente tanto en la literatura teórica como en las aplicaciones. También se describen otras medidas no pertenecientes a la familia anterior pero que, por diferentes motivos, son una referencia en la medición de la desigualdad. Esta distinción la hacemos únicamente a efectos expositivos.

Otra posibilidad a la hora de introducir los índices de desigualdad consiste en diferenciar entre los de carácter positivo y los de tipo normativo. Los primeros se identifican con las medidas estadísticas de dispersión. El enfoque normativo relaciona los índices con alguna función de bienestar social (FBS), interpretando la desigualdad como una pérdida de bienestar. Las diferencias entre ambos enfoques son más bien aparentes dado que cualquier índice, con independencia de su origen, presenta elementos de ambos. Por otra parte, bajo determinadas hipótesis se puede establecer una correspondencia biunívoca entre FBS e índices de desigualdad (Kolm, 1969; Atkinson, 1970; Sen, 1973).

En el contexto de este trabajo, el conjunto de alternativas sociales que valora una FBS, a partir de las preferencias individuales, se identifica con el de distribuciones de renta, D. Presentan especial interés aquellas funciones que permiten expresar la evaluación social de una distribución de renta a partir de su tamaño (renta media) y de su dispersión, evaluada por algún índice de desigualdad. En este sentido, siguiendo el enfoque de Sen (1973), que generaliza el de Atkinson (1970), se define el concepto de renta igualitaria equivalente, una especie de renta media corregida por la desigualdad, que constituye una medida del bienestar asociado a cada distribución.

El artículo sigue el siguiente esquema. Tras esta introducción, en la sección siguiente se inicia el análisis gráfico de la desigualdad dedicando especial atención a la curva de Lorenz. La tercera sección se dedica a la comparación de distribuciones mediante relaciones de dominancia y/o medidas escalares, describiendo las propiedades que se consideran deseables para una medida de desigualdad y se especifican los índices de uso más frecuente. De la relación entre desigualdad y bienestar nos ocupamos al describir la familia de índices de Atkinson (1970) y de forma más específica en la sección cuarta. En la sección quinta se enumeran algunas aplicaciones de la medición de la desigualdad, dedicando cierta atención al efecto redistributivo del impuesto sobre la renta. Para terminar, en la sección sexta se exponen unas consideraciones finales.

A lo largo del artículo, sin que afecte a la comprensión del texto y sin renunciar al rigor en la exposición, hemos optado tanto por eludir algunas cuestiones técnicas, como por prescindir de la demostración de resultados, aunque proporcionando las oportunas referencias.

Consideraciones previas

El estudio de la desigualdad implica tomar una serie de decisiones que pueden alterar sustancialmente las conclusiones que se obtengan. En el trabajo empírico es necesario, en primer lugar, seleccionar y definir de forma precisa y operativa la variable cuya dispersión es objeto de análisis (qué se distribuye) y quiénes son los receptores.

Los indicadores más significativos del nivel de vida y del bienestar material de las personas son la renta y el consumo. Ambas son magnitudes flujo, relativas a un período de tiempo. Mientras que algunos autores consideran que el consumo refleja mejor el nivel de vida que la renta corriente al presentar menos fluctuaciones a corto plazo (Slesnick, 1991; Deaton y Zaidi, 2002), otros señalan que el concepto económico de consumo presenta serias dificultades de medición (Atkinson y Bourguignon, 2000), dado que es necesario distinguir entre lo efectivamente consumido y el gasto en consumo. La información estadística sobre la renta se recoge con regularidad y es bastante fiable.

La variable monetaria que se utilice para representar la posición de los individuos, según su capacidad de adquisición de bienes y servicios, ha de estar expresada en términos reales, más aún si el estudio del bienestar se realiza en un entorno de crecimiento, para separar el aumento real del inducido por los precios. A partir de ahora, consideraremos que la variable objeto de análisis es la renta.

Otra cuestión a decidir es la unidad de análisis. En las encuesta, la unidad básica de recogida de la información suele ser la familia y esta suele tomarse como unidad de análisis, ya que el nivel de vida de un individuo está influido por su renta y por la de las personas con las que convive. Aunque la unidad de análisis sea la familia, estudiaremos la desigualdad en la renta de los individuos ya que tratamos de analizar la posición económica de las personas. Por tanto, es necesario transformar la renta familiar en renta personal y para ello hay que tener en cuenta el tamaño y composición de las familias, dado que ambas características generan diferencias en las necesidades familiares que deben ser contempladas en el análisis del bienestar de individuos que viven en familias heterogéneas.

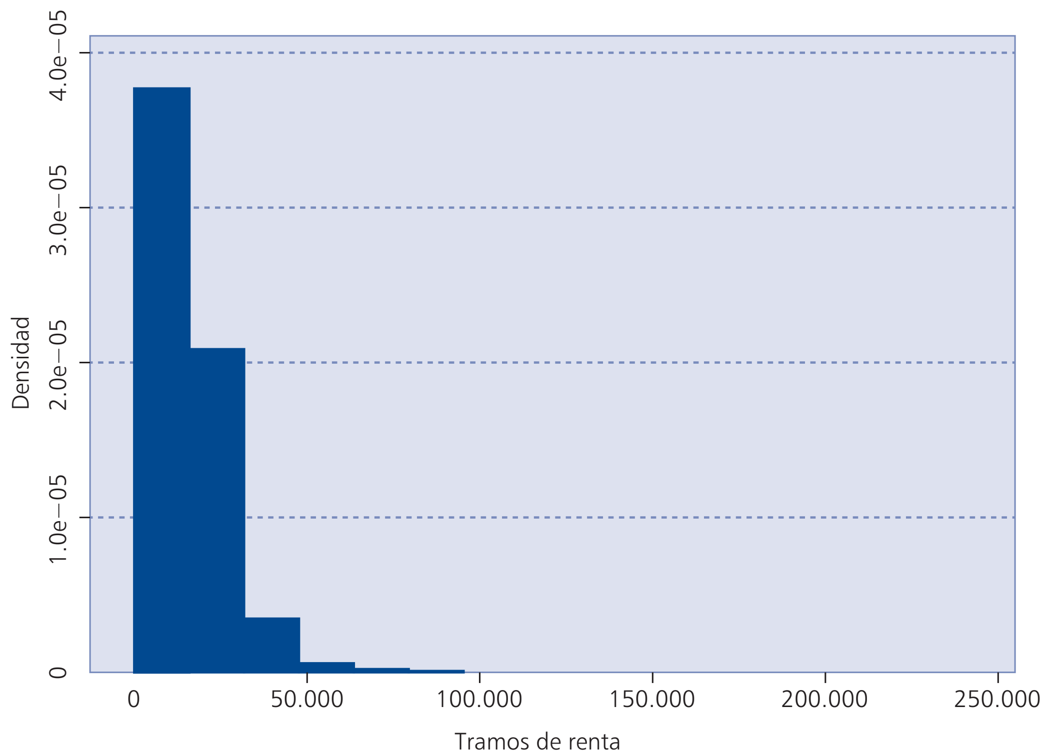
La herramienta que permite cuantificar el efecto de las economías de escala y convertir la renta de familias con distinto tamaño y composición en una base común que mida el poder de compra de los individuos es la escala de equivalencia. Aunque hay distintas metodologías para construir estas escalas (de tipo econométrico, las determinadas por expertos, paramétricas,…), la literatura empírica se ha decantado por las escalas de equivalencia *ad hoc* en las que a los miembros del hogar se les asigna una ponderación arbitraria. La más empleada en el contexto europeo, por recomendación de Eurostat, es la escala OCDE modificada. En este proceso se agregan sin distinción las rentas obtenidas por los miembros del hogar, la cuantía total se convierte en una base común aplicando la escala de equivalencia y el monto resultante se asigna a cada uno de los individuos. La elección de una u otra escala condicionará los resultados y al no poder identificar una de ellas como superior a las demás, es necesario tener en cuenta la sensibilidad y robustez de los resultados a distintas escalas. Por supuesto, las comparaciones de desigualdad entre distribuciones han de hacerse empleando en todas ellas la misma escala de equivalencia.

II. FUNCIONES Y GRÁFICAS ASOCIADAS A UNA DISTRIBUCIÓN DE RENTAS. UNA PRIMERA APROXIMACIÓN A LA DESIGUALDAD. CURVA DE LORENZ

Fijada la variable objeto de estudio y la unidad de análisis, los métodos gráficos suelen ser el comienzo habitual del estudio de la desigualdad en una distribución al permitir examinar visualmente el reparto de la renta entre los individuos de la población. El punto de partida puede ser la

GRÁFICO 1

DISTRIBUCIÓN DE LA RENTA DISPONIBLE EQUIVALENTE EN ESPAÑA, 2015. HISTOGRAMA CON 15 INTERVALOS



Fuente: Encuesta de condiciones de vida (ECV), 2016 (INE).

gráfica de la distribución empírica de frecuencias o histograma. Se construye ordenando la población según sus rentas de menor a mayor, dividiendo el rango de la variable renta en un cierto número de intervalos que se representan en el eje de abscisas, mientras que en el eje de ordenadas se contabilizan sus respectivas frecuencias relativas o alturas. Así, el histograma presenta la distribución de la renta como un conjunto de rectángulos cuyas bases son los intervalos de rentas y unas alturas tales que el área de cada rectángulo sea igual o proporcional a su frecuencia relativa. En el gráfico 1 se representa el histograma de la renta española cuando consideramos quince intervalos de renta a partir de los datos de la *Encuesta de condiciones de vida* (*ECV*) del Instituto Nacional de Estadística (INE) para la ola del año 2016, que contiene información sobre la renta disponible equivalente de 2015.

La observación del histograma permite tener una idea intuitiva tanto del grado de dispersión de la variable como de su grado de asimetría, características ambas que inciden en el nivel de desigualdad en el reparto de la renta.

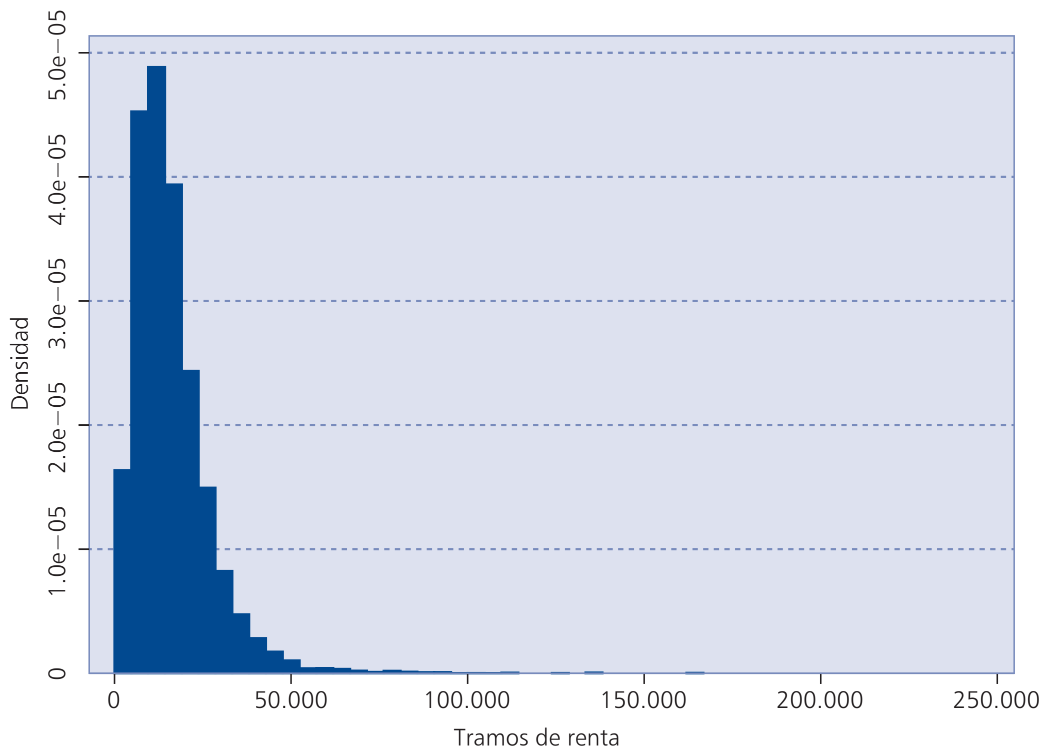
Sin embargo, la información gráfica acerca de la distribución que nos ofrece el histograma está condicionada por el número y por la amplitud de los intervalos utilizados para dividir la escala de rentas. Observemos el histograma del gráfico 2. Los datos a partir de los cuales se ha construido son los mismos que en el caso anterior, solo que ahora consideramos 50 intervalos.

Si continuáramos dividiendo el rango de la variable renta en un número cada vez mayor de tramos de igual amplitud, la información que nos aportaría el gráfico sería cada vez más detallada. Para ello es preciso suponer que la renta se distribuye de forma continua a lo largo de la escala de rentas.

Actualmente se dispone de técnicas más sutiles para representar distribuciones de renta. Se trata de las funciones de densidad no paramétricas.

GRÁFICO 2

DISTRIBUCIÓN DE LA RENTA DISPONIBLE EQUIVALENTE EN ESPAÑA, 2015. HISTOGRAMA CON 50 INTERVALOS



Fuente: Encuesta de condiciones de vida (ECV), 2016 (INE).

Estas funciones constituyen un afinamiento de los histogramas, caracterizados por presentar saltos o discontinuidades y ser muy sensibles al número y amplitud de sus intervalos. Estas funciones toman como punto de partida el histograma y no imponen una forma funcional a la distribución permitiendo que los datos «hablen por sí mismos». En el gráfico 3 se representa la función de densidad estimada mediante la estimación kernel.

La comparación de las funciones de densidad no paramétrica nos permite hacernos una idea de la evolución de la desigualdad. El gráfico 4 muestra las funciones de densidad de la renta en los años 2007 y 2015 en euros reales de 2015.

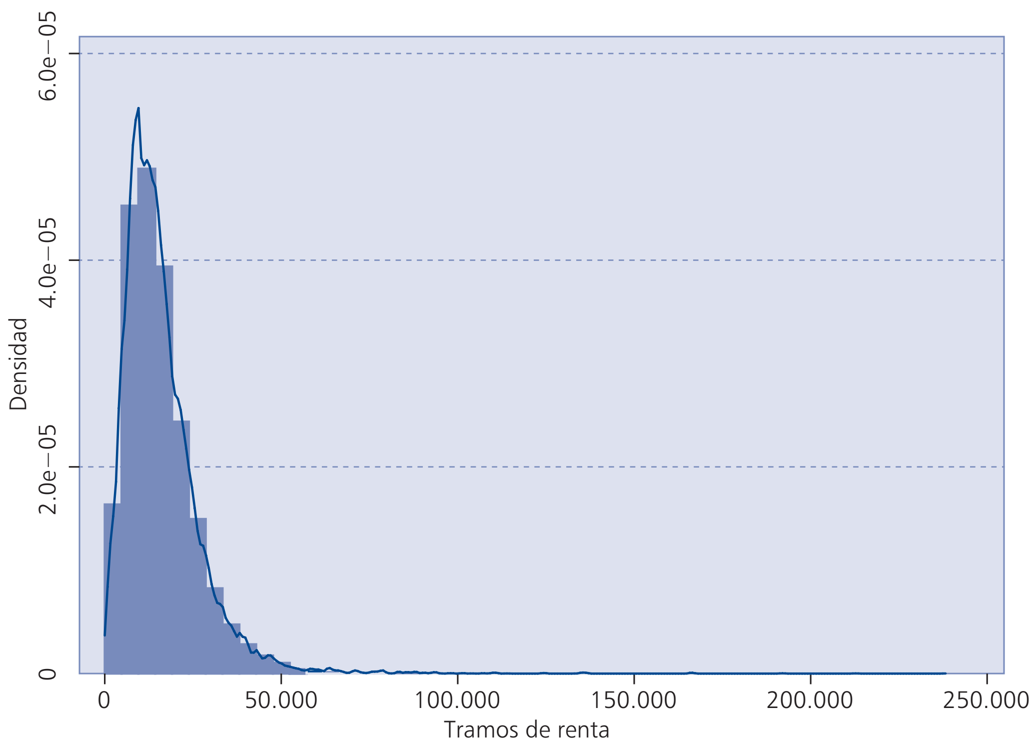
Observamos que en 2015 hay un claro desplazamiento de la función de densidad hacia la izquierda. Apreciamos una disminución de la densidad en las rentas superiores a la moda de 2007 y un incremento de la densidad en las inferiores a ella.

Aunque el histograma y la estimación no paramétrica de la función de densidad proporcionan una primera imagen de la distribución, estas representaciones gráficas no son las herramientas más adecuadas para analizar específicamente la desigualdad.

Los porcentajes de renta total que corresponden a diversos grupos de perceptores de renta pueden dar una idea más aproximada del grado de desigualdad de una distribución. Por ejemplo, para la distribución de la renta disponible en España en 2015, se puede afirmar que el 1 por 100 de la población con más renta (más de 52.876 euros equivalentes) recibe el 4,60 por 100 del total. En el cuadro n.º 1 se presenta información de este tipo de forma más sistemática. En su segunda columna se muestra el porcentaje de renta que perciben los individuos situados en cada decila. Así, una vez ordenados los individuos en orden ascendente en función de sus rentas disponibles, podemos decir que el 10 por 100 más pobre recibe el 2,16 por 100 del total de la renta, el segundo 10 por 100 de la población per-

GRÁFICO 3

DISTRIBUCIÓN DE LA RENTA DISPONIBLE EQUIVALENTE EN ESPAÑA, 2015. HISTOGRAMA CON 50 INTERVALOS Y ESTIMACIÓN NO PARAMÉTRICA DE LA FUNCIÓN DE DENSIDAD



Fuente: Encuesta de condiciones de vida (ECV), 2016 (INE).

cibe el 4,22 por 100 de la renta y así sucesivamente. Presentando esta información de manera acumulada (últimas dos columnas), el 10 por 100 más pobre de la población percibe el 2,16 por 100 de la renta total, el 20 por 100 más pobre el 6,38 por 100 de la renta y así sucesivamente hasta indicar que el 90 por 100 más pobre recibe el 75,22 por 100 de la renta, o lo que es igual, el 10 por 100 más rico recibe el 24,78 por 100 de la renta total. Se pone así de manifiesto la desigualdad en el reparto. En una distribución de rentas que fuese igualitaria, es evidente que los porcentajes de participación en la población y en la renta total coincidirían.

Para un análisis como el anterior y, sobre todo, si queremos comparar cómo es el reparto de la renta total en distribuciones diferentes, hay que utilizar algún sistema que permita realizar esa comparación al considerar los niveles de participación en la renta por decilas, percentiles o mediante cualquier cuantila. Una herramienta adecuada para realizar ese tipo de análisis es la curva de Lorenz (1905).

CUADRO N.º 1

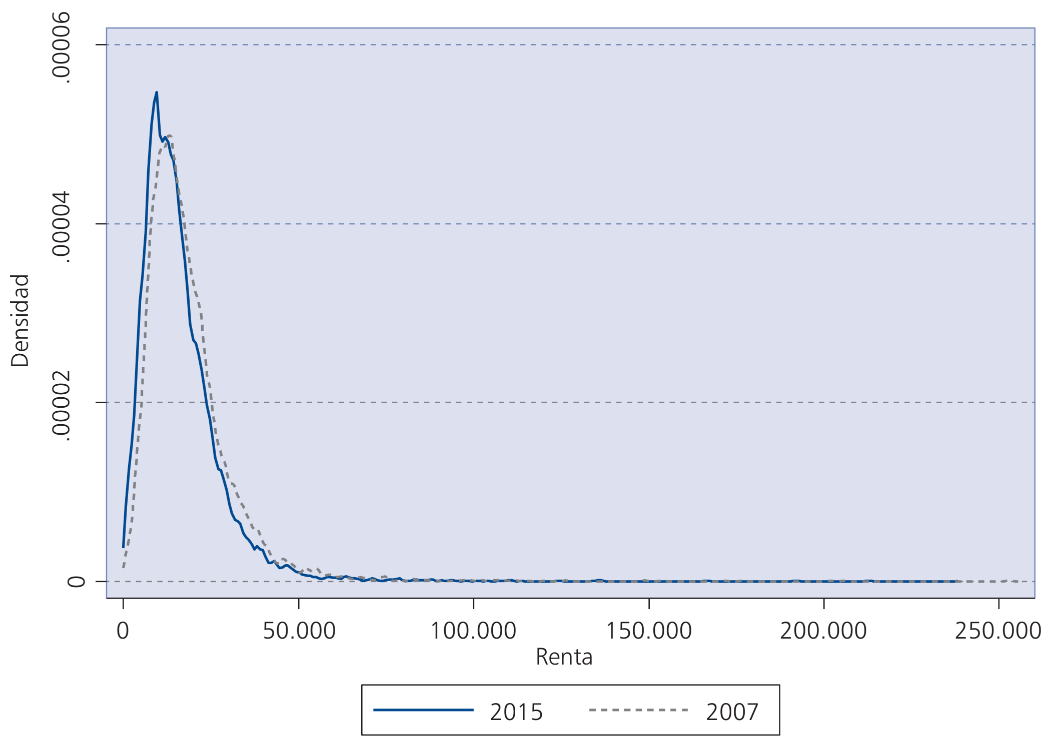
PORCENTAJES DE POBLACIÓN, PORCENTAJES EN LA RENTA DISPONIBLE EQUIVALENTE, PORCENTAJES ACUMULADOS DE POBLACIÓN, 100P, Y SUS CORRESPONDIENTES PORCENTAJES ACUMULADOS EN LA RENTA DISPONIBLE EQUIVALENTE TOTAL ESPAÑOLA, 100L(P), PARA 2015

Porcentaje de población	*Porcentaje de renta*	*100p*	*100L(p)*
10	2,16	10	2,16
10	4,22	20	6,38
10	5,51	30	11,89
10	6,70	40	18,58
10	7,97	50	26,55
10	9,29	60	35,84
10	10,81	70	46,65
10	12,85	80	59,49
10	15,73	90	75,22
10	24,78	100	100

Fuente: Encuesta de condiciones de vida (ECV), 2016 (INE).

GRÁFICO 4

DISTRIBUCIÓN DE LA RENTA DISPONIBLE EQUIVALENTE EN ESPAÑA, 2007 Y 2015. ESTIMACIÓN NO PARAMÉTRICA DE LA FUNCIÓN DE DENSIDAD



Fuente: Encuesta de condiciones de vida (ECV), 2016 (INE).

Dicha curva es la representación gráfica de una función, *L(·)*, que proporciona la información sobre niveles de participación por cuantilas para una distribución de renta dada. Esta función se construye del siguiente modo. Los individuos se ordenan según su nivel de renta, en orden ascendente, y se representa, para las distintas proporciones acumuladas de la población (p) así ordenada (desde 0 hasta 1 en el eje horizontal), la proporción acumulada de renta total (L(p)) obtenida por dichos individuos (desde 0 hasta 1 en el eje vertical). Por lo tanto, para cada $p \in [0,1]$, L(p) es la proporción de la renta total que percibe el 100p por 100 más pobre de la población. El gráfico 5 muestra la curva de Lorenz asociada a la distribución de la renta disponible española para 2015. Concretamente, el gráfico 5 es la representación gráfica de las dos últimas columnas del cuadro n.º 1 (2).

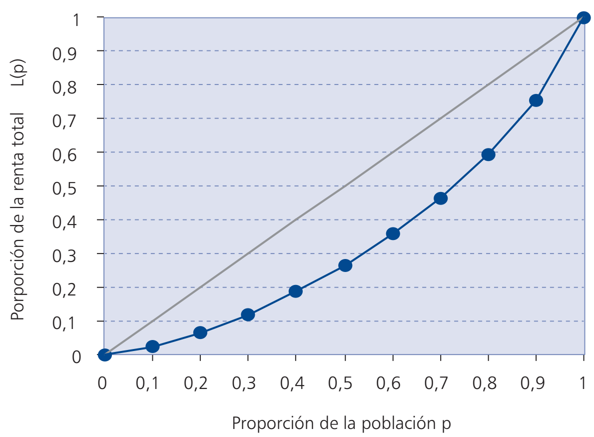
La curva de Lorenz siempre se sitúa por debajo de la línea correspondiente a la bisectriz del primer cuadrante; es decir, $L(p) < p$, $0 < p < 1$. Es evidente que siempre $L(0)=0$, y $L(1)=1$, ya que el 0 por 100 de la población recibe el 0 por 100 de la renta total, y el 100 por 100 de la población recibe el 100 por 100 de la renta total.

Cuando existe desigualdad, los grupos que corresponden a las cuantilas superiores reciben una proporción de renta mayor que su participación en la población, y las cuantilas más bajas reciben una proporción de renta inferior a su participación en la población.

Si todos los individuos disfrutan de un mismo nivel de renta, es decir, si hay equidistribución, las participaciones acumuladas en la renta total y en la población coinciden. Por tanto, en este caso es $L(p)=p$, para todo $p \in [0,1]$, de manera que la curva de Lorenz coincide con la diagonal, como se recoge en el gráfico 6A. Esa diagonal recibe el nombre de línea de igualdad perfecta o de equidistribución.

GRÁFICO 5

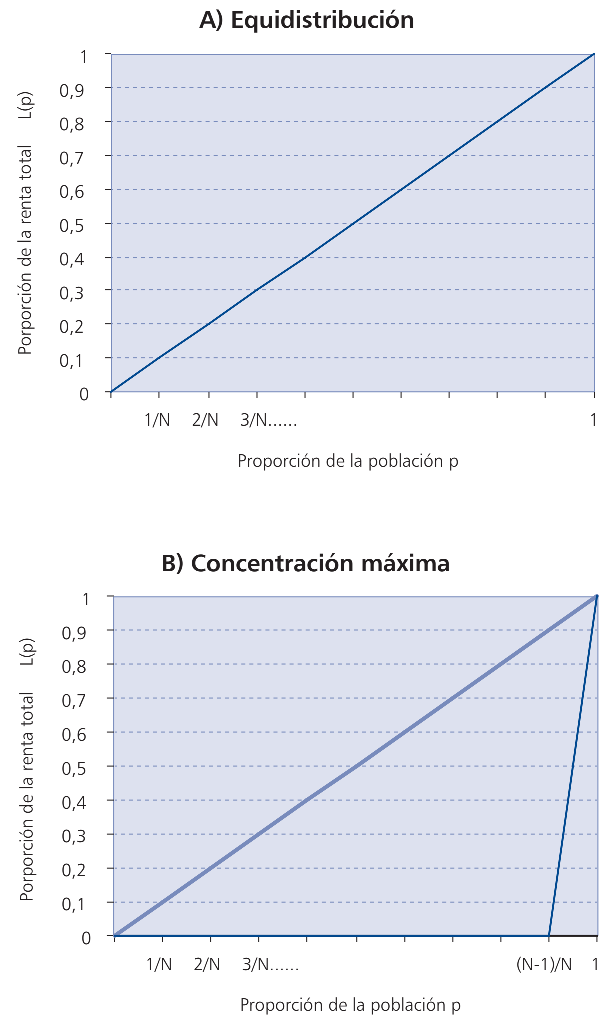
CURVA DE LORENZ PARA LA RENTA DISPONIBLE EQUIVALENTE EN ESPAÑA, 2015



Fuente: Encuesta de condiciones de vida (ECV), 2016 (INE).

GRÁFICO 6

CURVAS DE LORENZ



El otro caso extremo es el de concentración máxima: un único individuo percibe el total de la renta y el resto de la población no recibe nada. En este caso, las sucesivas participaciones acumuladas en la renta total son nulas ($L(p) = 0$ para $0 \leq p < 1$) hasta acumular toda la renta al considerar la población total, incluido ese único perceptor, $L(1) = 1$. Esta situación se corresponde con la del gráfico 6B En ella, la curva de Lorenz coincide con el eje horizontal hasta el valor de la abscisa igual a (N-1)/N y desde ese punto asciende hasta (1, 1).

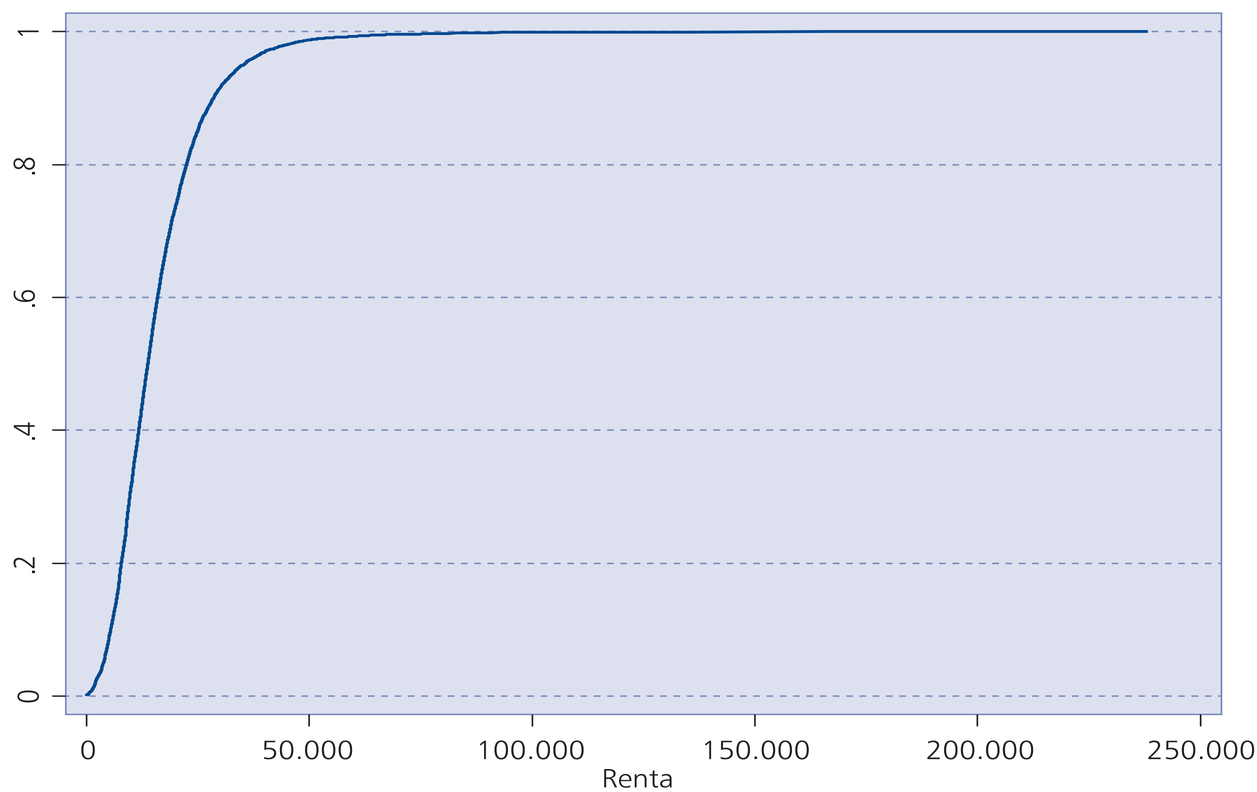
Para definir formalmente la curva de Lorenz introducimos algunos conceptos. Supondremos que la distribución de la renta en la población está representada por la variable aleatoria X, cuyo recorrido es la semirrecta real positiva, $R^+ = [0, \infty)$, siendo $F: \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$ su función de distribución. Para cada valor real x, F(x) es la proporción de individuos cuya renta es menor o igual que x, por lo que $F(\cdot)$ es no negativa, no decreciente y, en el límite $F(-\infty)=0$, $F(\infty)=1$. En el caso discreto, para una población homogénea de N individuos, $N \geq 2$, si x_i es la renta del individuo i-ésimo, bajo el supuesto de que las rentas están ordenadas de menor a mayor y son no negativas (3), cada distribución de rentas viene representada por un vector $X=(x_1,x_2,\dots,x_N)$, cuyas componentes cumplen $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_N$. Fijado el tamaño de la población, el conjunto de todas las distribuciones de renta de tamaño N lo representaremos por D^N, mientras que $D = \cup_N D^N$ es el conjunto de todas las distribuciones de renta.

El gráfico 5 muestra la representación gráfica de la función de distribución de la renta española en 2015.

Lorenz (1905) introdujo su curva en términos discretos. Es una formulación muy intuitiva que se corresponde con el modo de proceder en la práctica al analizar una distribución de rentas. Para la distribución $X=(x_1, x_2, \dots, x_N)$, $\mu = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$ es su renta media. Al estudiar el reparto de la renta total, $N\mu$, entre los elementos de la población a través de la curva de Lorenz, se consi-

GRÁFICO 7

FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN PARA LA RENTA DISPONIBLE EQUIVALENTE EN ESPAÑA, 2015



Fuente: Encuesta de condiciones de vida (ECV), 2016 (INE).

deran las participaciones acumuladas de población $p_i = \frac{i}{N}$, proporción de individuos con renta menor o igual a x_i, $1 \leq i \leq N$, y sus respectivas participaciones en el volumen total de renta, $L(p_i)$, siendo

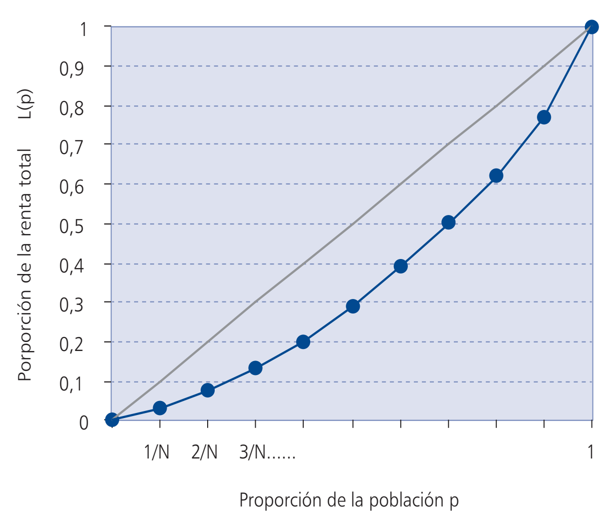
$$L(p_i) = \frac{\Sigma_{j=1}^{i} x_j}{N\mu} = q_i,\ 1 \leq i \leq N. \qquad [1]$$

La curva de Lorenz, representación gráfica de la función $L(\cdot)$, viene dada por los puntos (0,0), $(p_i, L(p_i))$, $1 \leq i \leq N$, y la poligonal que une cada dos consecutivos (gráfico 8).

Es evidente que la función $L(\cdot)$ es creciente. Es además convexa. Un sencillo cálculo prueba que la pendiente de la curva entre dos puntos consecutivos (p_{i-1}, q_{i-1}), (p_i, q_i), es igual a la renta relativa x_i/μ. Por tanto, la pendiente de la curva de Lorenz aumenta al desplazarnos a la derecha en el gráfico anterior, hacia las rentas altas.

GRÁFICO 8

CURVA DE LORENZ. CASO DISCRETO



Para facilitar el tratamiento analítico es conveniente en ocasiones utilizar la formulación continua de la curva de Lorenz. Si la renta se representa mediante la variable aleatoria continua X con función de distribución F(·) y función de densidad $f(x) = F'(x)$, $x \in \mathbb{R}$, la renta media es $\mu=\int_0^\infty x dF(x)=\int_0^\infty xf(x)dx$. La curva de Lorenz asociada a esta distribución se expresa como:

$$L: [0,1]\to[0,1],\ L(p)=\frac{1}{\mu}\int_0^x sdF(s)=\frac{1}{\mu}\int_0^x sf(s)ds,\ p=F(x) \qquad [2]$$

El significado y las propiedades de la función L(·) coinciden, como es natural, con las indicadas en el caso discreto, si bien la continuidad permite obtener algún resultado adicional. La gráfica de una curva de Lorenz continua, contenida en el cuadrado unidad [0,1]x[0,1], se muestra en el gráfico 9.

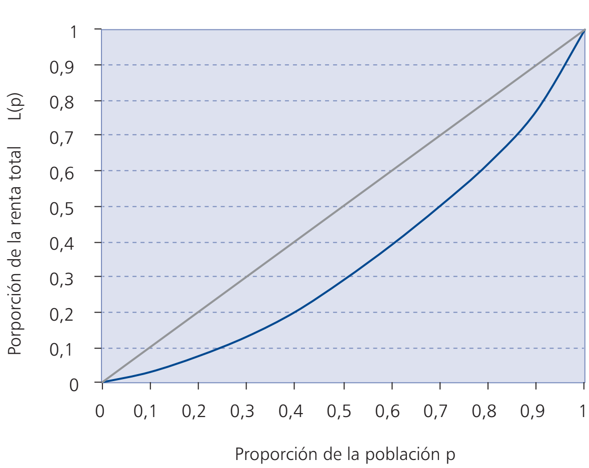
Una función usual en la literatura sobre desigualdad es la inversa generalizada de la función de distribución F^{-1}:[0,1]→ℝ, llamada también función cuantil, Q(·). Se define como

$$Q(p)=F^{-1}(p)=\inf\left\{x\in\mathbb{R} | F(x)\geq p,\ p\in(0,1]\right\},F^{-1}(0)=x_1. \qquad [3]$$

Q(p) es la renta correspondiente al percentil p de la distribución; es decir, si Q(p)=x, el 100 por 100 de la población tiene un nivel de renta igual o inferior a x. Esta función fue introducida por Gastwirth (1971) para obtener una definición de la curva de Lorenz aplicable tanto a variables aleatorias continuas como discretas. Se verifica (4):

GRÁFICO 9

CURVA DE LORENZ. CASO CONTINUO



$$L(p)=\frac{1}{\mu}\int_0^p F^{-1}(t)dt,\ 0\leq p\leq 1,\ \mu=\int_0^1 F^{-1}(t)dt. \qquad [4]$$

La representación gráfica de la función cuantil, al ser la inversa de F(·), es simétrica de la de la función de distribución respecto de la bisectriz del primer cuadrante. El gráfico 10 muestra dicha función para la renta disponible equivalente en España, 2015.

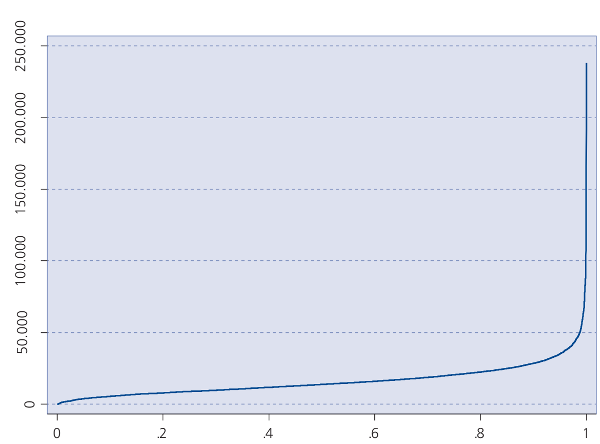
Un resumen de las propiedades de la curva de Lorenz L(·), sería el siguiente:

- $L(p) \leq p$, $p\in[0,1]$.
- $L(p) = p$, $p\in[0,1]$ si la distribución es igualitaria.
- $L(p) = 0$, $p\in[0,(N-1)/N]$ y $L(1) = 1$ si la distribución presenta concentración máxima (gráfico 6B).
- L(p) es invariante frente a cambios de escala en la renta.
- L(p) es no decreciente y convexa.
- En el caso continuo se cumple (5) $L'(p)_{-}=\frac{x}{\mu}$, $L''(p)=1/(\mu f(x))$, $0 < p < 1$, $p=F(x)$.

Como consecuencia de la última propiedad, además del crecimiento y convexidad de la curva de Lorenz, se obtienen dos corolarios de interés. En primer lugar, fijada la renta media, L(·) caracteriza la distribución. Ello implica que, junto a μ, esta función contiene la misma información que la función

GRÁFICO 10

FUNCIÓN CUANTIL PARA LA RENTA DISPONIBLE EQUIVALENTE EN ESPAÑA, 2015



Fuente: Encuesta de condiciones de vida (ECV), 2016 (INE).

de densidad f(·), pero es más adecuada para analizar específicamente la desigualdad. Por otra parte, en el percentil que corresponde a la renta media, μ, se alcanza la máxima distancia vertical entre la línea de equidistribución y la curva de Lorenz, lo que da lugar, como veremos, a un índice de desigualdad.

Es importante observar que la curva de Lorenz, invariante frente a los cambios de escala en la variable renta, incorpora un concepto relativo de desigualdad en el que lo relevante es la relación (cociente) existente entre las rentas de los individuos. La desigualdad absoluta centra su atención en las diferencias absolutas entre las rentas individuales, por lo que es invariante frente a los cambios de origen de la variable renta (6). Si se produce una variación en la renta total de una distribución, para mantener su desigualdad absoluta habría de repartirse el incremento o disminución total a partes iguales entre todos los perceptores, mientras que ese reparto tendría que ser proporcional a las rentas iniciales si no se quiere alterar la desigualdad relativa (7). En este trabajo nos hemos referido hasta ahora de forma implícita a la desigualdad relativa, la predominante en la literatura, y así lo haremos en lo sucesivo, salvo que se indique lo contrario.

III. COMPARACIÓN DE DISTRIBUCIONES EN TÉRMINOS DE DESIGUALDAD

El estudio de la desigualdad se puede hacer desde un punto de vista ordinal o mediante un enfoque cardinal. Ambas formas de proceder no solo son compatibles sino que, en muchas ocasiones, se complementan. El utilizar con preferencia una u otra depende de la finalidad del análisis.

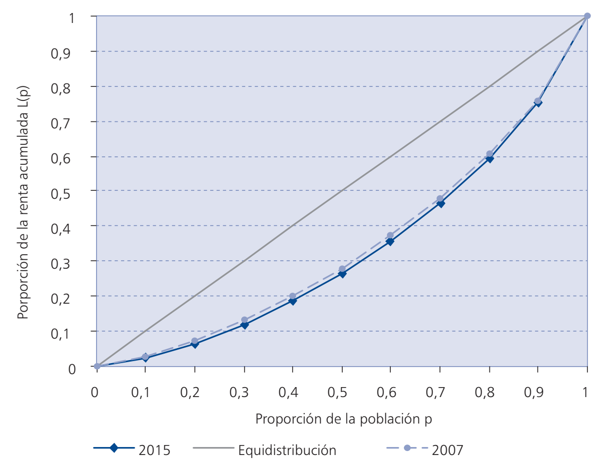
1. Comparaciones ordinales

Como se ha visto, la curva de Lorenz es muy útil para analizar el reparto de un volumen de renta dado entre los elementos de una población. Sin embargo, quizá su aplicación más importante es la comparación de distribuciones en términos de desigualdad.

Una forma sencilla de comparar la desigualdad de dos distribuciones de renta, X e Y, consiste en representar sus correspondientes curvas de Lorenz, L_X y L_Y, en el mismo gráfico.

En el gráfico 11 se representan las curvas de Lorenz de la renta disponible en España para 2007,

GRÁFICO 11
COMPARACIÓN DE CURVAS DE LORENZ



Fuente: Encuesta de condiciones de vida (ECV), 2016 (INE).

L_X, y 2015 L_Y, utilizando en ambas datos de decilas de renta. Se observa que está situada siempre por encima de L_Y (es decir, L_X está más próxima a la línea de equidistribución que L_Y). En tal caso, se puede asegurar que la distribución X es más igualitaria, en términos de la curva de Lorenz, que la distribución Y, o bien, que X domina a Y en el sentido de Lorenz. Es decir, podemos asegurar que la distribución de la renta disponible en 2015 es más desigual que la de 2007.

En el gráfico anterior, para cuaquier p ∈ [0,1], el 100p por 100 de la población con menos renta en 2007 tiene una participación en la renta total mayor que la de ese mismo grupo de población en la distribución 2015. Si el evaluador social tiene aversión a la desigualdad, lo que implica incorporar un juicio de valor, diría que en 2007 el reparto de la renta es más satisfactorio que en 2015, al ser más igualitario.

La dominancia en el sentido de Lorenz permite definir una relación binaria en el conjunto de las distribuciones de renta admisibles, D.

Dadas dos distribuciones de renta, (X,Y) ∈ D x D, se dice que X no es más desigual que Y en el sentido de Lorenz, o bien, X domina a Y en el sentido de Lorenz y se expresa $X \geq_L Y$, cuando la curva de Lorenz de X nunca se sitúa por debajo de la de Y. Es decir:

$$X \geq_L Y \Leftrightarrow L_X(p) \geq L_Y(p) \text{ para todo } p \in [0,1].$$

La dominancia estricta, $X >_L Y$, exige, además, que para algún $p \in (0,1)$ se cumpla $L_X(p) > L_Y(p)$.

La relación $\geq_L$ cumple las propiedades reflexiva, antisimétrica (8) y transitiva, por lo que $(D, \geq_L)$ es un conjunto parcialmente ordenado. La relación binaria $\geq_L$ no es un orden total o completo sobre D, dado que se pueden encontrar distribuciones no comparables. Es decir, existen pares de distribuciones $(X,Y) \in D \times D$ tales que no se cumple $X \geq_L Y$ ni tampoco $Y \geq_L X$. Esta situación se presenta en aquellas distribuciones cuyas curvas de Lorenz se cortan en algún punto interior del intervalo [0, 1]. Un ejemplo gráfico es el que se muestra en el gráfico 12.

En la figura anterior, X es más igualitaria que Y en el extremo inferior hasta un cierto $p_0 \in (0,1)$ a partir del cual sucede lo contrario. En esta situación la relación $\geq_L$ no permite decir qué distribución presenta menor desigualdad y es necesario recurrir a medidas escalares. La conclusión dependerá del índice que utilicemos según los juicios de valor que incorpore, de forma explícita o implícita, acerca de la importancia de la desigualdad en las diferentes partes de la distribución.

La curva de Lorenz informa sobre el reparto de la renta total, pero no ofrece información sobre su volumen a través de la renta media, por lo que, excepto en casos particulares, dadas dos distribuciones no puede indicarnos cuál de ellas es superior en bienestar. Para obtener conclusiones en tales términos Shorrocks (1983) introduce la curva de Lorenz generalizada LG(·), en la que se combina reparto y nivel de renta. En el caso discreto, se tendría:

$$LG_F(i/_N) = \frac{\sum_{j=1}^{i} x_j}{N} = \frac{i}{N} \frac{\sum_{j=1}^{i} x_j}{N} = q_i,\ 1 \leq i \leq N. \qquad [5]$$

Es decir, $LG(p_i)$ es el producto de la participación en la población del grupo de individuos cuya renta es menor o igual que x_i y de la renta media de ese grupo.

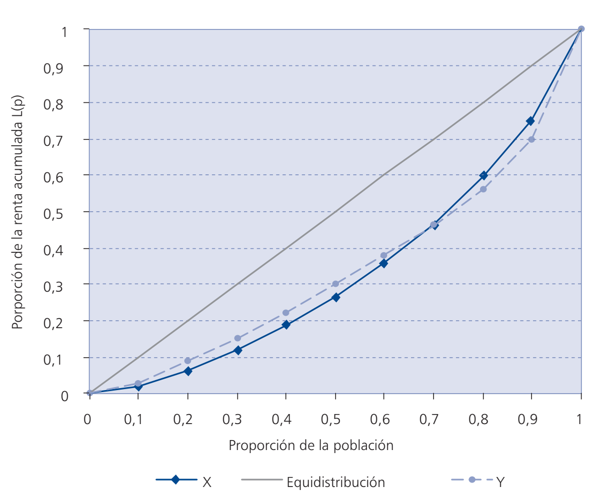
En el caso continuo, esta función, para una distribución F(·), se define como:

$$LG_F(p) = \int_0^x s dF(s) = \mu_F L_F(p),\ p = F(x) \qquad [6]$$

Como veremos más adelante, a partir de una relación de dominancia entre curvas de Lorenz generalizadas se obtiene un resultado robusto para una clase muy amplia de FBS.

Existen otros criterios de dominancia estocástica de distinto orden que se verifican con hipótesis cada vez más débiles. Algunos de estos criterios coinciden, bajo ciertas condiciones, con la dominancia inducida por la curva de Lorenz ordinaria o generalizada (9).

GRÁFICO 12
COMPARACIÓN DE CURVAS DE LORENZ QUE SE CRUZAN



2. Medidas escalares: índices de desigualdad

Dado que $(D, \geq_L)$ es un conjunto parcialmente ordenado es necesario disponer de criterios de valoración de la desigualdad que permitan comparar distribuciones sin restricción alguna, lo que se consigue mediante la utilización de las medidas o índices de desigualdad. Cada una de ellas asigna a cada distribución de rentas un número real e induce en una ordenación total o completa.

Formalmente, una medida de desigualdad, I, es una función $I: D \rightarrow \mathbb{R}$ que asocia a cada distribución un número real. Si $X \in D, I(X) \equiv I_X$ es el valor del índice I sobre la distribución X e indica el nivel de desigualdad que ese índice asigna a dicha distribución.

Se entiende que ser más desigual implica un valor mayor de la función I. Toda medida de desigualdad ordena totalmente el conjunto D y permite, por tanto, comparar cualquier par de distribuciones de rentas, así como cuantificar la diferencia entre sus respectivos niveles de desigualdad. A esta función parece razonable exigirle que satisfaga una serie de propiedades o axiomas de distinta naturaleza que suelen utilizarse como referencia al analizar diferentes índices. A continuación presentamos un conjunto de propiedades que se consideran deseables para una medida de desigualdad.

1. Simetría o anonimidad

   La desigualdad no varía si se produce una permutación en la posición de los individuos en la distribución.

   En esta condición subyace el supuesto de que la población es homogénea en el sentido de que los individuos solamente se distinguen por su nivel de renta (10).

2. Principio de réplica de población de Dalton

   La réplica de una población, que deja invariante la proporción de perceptores de cada una de las rentas originales, no afecta a su desigualdad.

   Esta condición permite comparar distribuciones sobre poblaciones de distinto tamaño al imponer que lo relevante en la medición de la desigualdad es la proporción de perceptores con un nivel de renta dado.

3. Independencia de escala

   Si todas las rentas cambian en la misma proporción, la desigualdad permanece constante.

   Esta condición permite comparar distribuciones con distinta renta media e implica que la desigualdad es un concepto relativo, independiente de la magnitud de la distribución de renta evaluada. Esta propiedad caracteriza a los índices de desigualdad relativos.

4. Principio de transferencias de Pigou-Dalton.

   Si se produce una transferencia de renta desde un perceptor hacia otro más pobre, sin que varíe la ordenación relativa entre ambos (transferencia progresiva), la desigualdad debe disminuir.

   Los índices que cumplen esta propiedad se dice que tienen preferencia por la igualdad o aversión a la desigualdad.

Hay propiedades que exigen que los índices ponderen más las transferencias que tienen lugar en la cola baja de la distribución, o que concedan mayor importancia a la situación de los individuos más pobres. Las dos propiedades siguientes se refieren a principios de transferencias más exigentes que el de Pigou-Dalton.

5. Principio de Transferencias transferencias Decrecientes decrecientes (PTD), (Kolm, 1976a, 1976b)

   Una transferencia progresiva entre dos individuos, con una diferencia de renta dada, ha de implicar una mayor reducción del índice, cuanto menores sean los niveles de renta de esos individuos.

6. Principio Posicional de Transferencias (PPT), Mehran (1976) y Kakwani (1980)

   Para una diferencia de rangos dada entre quienes tiene lugar la transferencia, el impacto es mayor en la medida en que ocurra entre individuos situados en la parte inferior de la distribución.

Ambos principios incorporan posturas análogas respecto de las transferencias progresivas, pero mientras que para el PTD lo relevante es la diferencia de rentas entre el donante y el receptor, para el PPT lo es la proporción de individuos situados entre ellos. Otra diferencia entre ellos consiste en que el PPT es una característica propia del índice, mientras que el PTD también depende de la forma concreta de la distribución sobre la que se aplica (véase Imedio y Bárcena, 2007).

Mientras que las propiedades anteriores incorporan aspectos normativos, existen otras que son de tipo más «operativo», tales como:

7a. Continuidad

El índice de desigualdad es una función continua. Es decir, «pequeñas» variaciones en la distribución implican cambios también «pequeños» en el valor del índice.

7b. Diferenciabilidad

«Pequeñas» variaciones en la distribución implican cambios también «pequeños» no únicamente en el valor del índice, sino también en su tasa de variación. Es evidente que esta propiedad es más exigente que la anterior.

7c. Normalización

Si la distribución es igualitaria, lo que sucede cuando todos los individuos reciben la misma renta, la desigualdad es cero (11).

Al enumerar las propiedades deseables de las medidas de desigualdad es frecuente encontrar en la literatura referencias a la de descomponibilidad. Esta propiedad es interesante en las aplicaciones al proporcionar información adicional sobre la estructura y magnitud de la desigualdad. Se pueden considerar dos aspectos.

Descomponibilidad por factores. Permite establecer la contribución de las distintas fuentes de renta a la desigualdad total, determinando qué parte de ella es atribuible a la desigualdad en cada uno de los tipos de renta, según su naturaleza (rentas del trabajo, rentas del capital, mixtas, prestaciones sociales, etc.) o según su perceptor (sustentador principal, cónyuge, hijos, ascendientes, etc.), teniendo en cuenta que cada factor tiene efectos directos e indirectos sobre la desigualdad.

Descomponibilidad aditiva por subpoblaciones. Al descomponer la población en grupos disjuntos, el índice de desigualdad puede expresarse como una suma ponderada de las desigualdades dentro de los grupos, más la desigualdad entre ellos. Es habitual que esta última componente se identifique con la desigualdad entre las medias de los grupos. El interés de esta propiedad se debe a que, salvo en casos triviales, la desigualdad del total es mayor que la suma de las desigualdades existentes en las partes consideradas por separado, ya que la heterogeneidad entre los grupos es, en sí misma, una fuente adicional de diversidad.

En ocasiones es suficiente con que se satisfaga una propiedad más débil que la anterior. La denominada *consistencia subgrupal* (Shorrocks, 1984, 1988; Sen y Foster, 1997) solo exige que en cualquier partición de la población el aumento en la desigualdad en un subgrupo implique el aumento de la desigualdad total sin establecer una relación concreta entre las magnitudes de estos incrementos. Solamente se trata de una correspondencia direccional.

Como hemos indicado, toda medida de desigualdad permite comparar cualquier par de distribuciones. Sin embargo, las ventajas aparentes de los índices de desigualdad tienen también su contrapartida. Cada una de estas medidas incorpora su propio criterio al agregar la información contenida en una distribución dada, asignando distinta ponderación a cada uno de sus tramos. En consecuencia, diferentes índices pueden dar lugar a distintas ordenaciones de un conjunto de distribuciones. Al no existir acuerdo sobre qué índice es el más adecuado, en el trabajo empírico es habitual la utilización de un conjunto de índices a fin de tener en cuenta distintos juicios de valor.

Existe, no obstante, una amplia clase de medidas ordinalmente equivalentes, entre las que se encuentran las de uso más habitual, que comparten la propiedad de ser consistentes con el criterio de ordenación inducido por la curva de Lorenz en el conjunto D.

2.1. Índices Lorenz consistentes

Una medida de desigualdad $I:D \rightarrow \mathbb{R}$ es consistente con el criterio de Lorenz si y solo si para todo par de distribuciones $(X,Y) \in D \times D$ tales que $L_X \geq_L$, se verifica $I_X \leq I_Y$. En sentido estricto se tendría, $L_X >_L L_Y \Rightarrow I_X < I_Y$.

El conjunto de índices que satisfacen la condición anterior, llamados de forma más breve Lorenz consistentes, lo representaremos mediante $\mathcal{L}$. Por tanto, si entre dos distribuciones existe dominancia en el sentido de Lorenz, cualquier elemento de $\mathcal{L}$ las ordenará del mimo modo. Ahora bien, si no existe dominancia en el sentido de Lorenz, la ordenación según los índices puede ser diferente, aunque sean Lorenz consistentes.

Foster (1985) caracteriza los elementos de la clase $\mathcal{L}$. La condición necesaria y suficiente para que una medida de desigualdad sea Lorenz consistente es que satisfaga las cuatro primeras propiedades anteriormente mencionadas: simetría, réplica de poblaciones, independencia de escala y el principio de transferencias de Pigou-Dalton.

Por supuesto, existen índices no pertenecientes a $\mathcal{L}$ al no satisfacer alguna de las propiedades anteriores, lo que no implica que su utilización no sea adecuada. En cada caso tanto la elección del concepto de desigualdad como la de los índices seleccionados para valorarla depende siempre de juicios de valor.

Antes de detallar las expresiones de algunas de las medidas de desigualdad más utilizadas en la literatura económica, comentamos brevemente las medidas de desigualdad propuestas por Mehran, ya que engloban varias de las medidas que veremos a continuación y permite presentarlas de forma unificada.

Si F(·) es la función de distribución de la renta, $F^{-1}(\cdot)$ es la función cuantil, y μ la renta media. Mehran (1976) introduce una familia de medidas lineales de desigualdad, $\mathscr{M}$, que se obtienen ponderando las diferencias relativas entre las rentas y la renta media, a través de la distribución. La expresión de este tipo de medidas es:

$$I = \frac{1}{\mu}\int_0^1 [F^{-1}(p) - \mu]\Pi(p)dp, \quad [7]$$

siendo $\Pi(\cdot)$ una función de ponderación, independiente de la forma de la función de distribución F(·), que verifica $\int_0^1 \Pi(p)dp = 0$.

Estas medidas satisfacen la propiedad de independencia de escala dado que en [7] las diferencias entre las rentas y la renta media están relativizadas por la propia media. Si $\Pi(\cdot)$ es continua no decreciente y $\Pi(1) = 1$ la medida cumple la propiedad de normalización, siendo I = 0 en caso de equidistribución e I =1 si la concentración es máxima. Cuando $\Pi(\cdot)$ es estrictamente creciente satisface el principio de transferencias de Pigou Dalton y si además su derivada es estrictamente decreciente, satisface el PPT.

Las medidas de $\mathscr{M}$ se pueden expresar en función de la curva de Lorenz,

$$I = \int_0^1 [p - L(p)]\pi(p)dp, \quad [8]$$

siendo $\Pi'(p) = \pi(p)$, $0 < p < 1$. Es decir, las medidas de desigualdad de Mehran se obtienen ponderando el área entre la curva de Lorenz y la línea de equidistribución. Al utilizar distintas funciones $\Pi(\cdot)$ o $\pi(\cdot)$ como esquemas de ponderación, se generan distintas actitudes en la valoración de la desigualdad.

A esta familia pertenecen muchas de las medidas de uso habitual. En particular, cuando $\pi(\cdot)$ es positiva en (0, 1), el índice es Lorenz consistente.

Las medidas *Lorenz consistentes* más usuales son:

1) *El índice de Gini* (Gini, 1912)

Es la medida más utilizada en el análisis, sobre todo empírico, de la desigualdad. No existe una justificación, al menos teórica, de su popularidad (12). Es un elemento más de la extensa familia $\mathscr{L}$, aunque no precisamente de los que presentan mejores propiedades si nos referimos a su comportamiento frente a principios de transferencias más exigentes que el de Pigou-Dalton (no satisface el PPT) o el principio de descomponibilidad aditiva.

Este índice se puede expresar de múltiples formas. Inicialmente se definió como la media aritmética de las diferencias en valor absoluto de todos los pares de rentas, dividida entre el doble de la renta media de la distribución. Es decir, si $X = (x_1, x_2, \ldots, x_N) \in D_N$, el índice de Gini, G_x, se expresa como:

$$G_x = \frac{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}|x_i - x_j|}{2N^2\mu_x} \quad [9]$$

En Gini (1912) se define como medida de dispersión la denominada diferencia media de Gini (Yitzhaki 1998),

$$MD_x = \frac{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}|x_i - x_j|}{N^2} \quad [10]$$

MD_x es la media de las diferencias, en valor absoluto, entre todos los pares de rentas y es una medida absoluta de desigualdad. Es evidente que $G_x = MD_x/2\mu_x$, lo que permite interpretar el índice de Gini como una distancia promedio entre las rentas en relación a la renta media. Por ejemplo, $G_x = 0{,}35$ indica que la distancia promedio entre las rentas de la distribución X es el 70 por 100 de μ_x.

Este coeficiente toma sus valores en el intervalo [0, 1], siendo nulo cuando la distribución es igualitaria y $G = (N - 1)/N$ si la distribución presenta máxima concentración, por lo que si $G \to 1$ si $N \to \infty$.

El índice G tiene una interpretación sencilla y muy intuitiva a partir de la curva de Lorenz, lo que sin duda ha contribuido a su gran utilización. Su valor mide el área entre la curva de Lorenz de una distribución y la línea de la igualdad perfecta como proporción del área total situada por debajo de dicha línea. Es un modo de cuantificar la proximidad (o la lejanía) de una distribución de la situación de equidistribución.

Una expresión muy conocida que relaciona este índice con la curva de Lorenz, en el caso continuo, es:

$$G_x = 2\int_0^1 (p - L_x(p))dp = 1 - 2\int_0^1 L_x(p)dp, \quad [11]$$

de modo que G_x coincide también con el doble del área comprendida entre la curva de Lorenz y la línea de equidistribución. Por otra parte, para cada p ∈ (0,1), las diferencias $p - L_x(p)$, llamadas diferencias de Lorenz, se pueden interpretar como distancias entre las proporciones acumuladas de renta de la distribución X y sus correspondientes en una distribución igualitaria. La expresión [11] muestra que el índice de Gini asigna una ponderación constante a dichas diferencias a lo largo de toda la distribución.

Este índice no satisface el PPT dado que el efecto de una transferencia progresiva entre dos individuos solo depende de la diferencia entre las posiciones de ambos en la distribución (distancia ordinal) con independencia de la situación que ocupen. En ese efecto tampoco tienen incidencia sus respectivos niveles de renta, ni la diferencia entre ellas.

El coeficiente de Gini es un elemento de $\mathscr{M}$ que se obtiene para la ponderación $\prod(p) = 2p - 1$, $0 \leq p \leq 1$, o bien $\pi(p) = 2$, $0 < p < 1$. A partir de la expresión [7], para $(x_1, x_2, ..., x_N)$, resulta

$$G_x = \frac{1}{N^2\mu} \sum_{i=1}^{N} (2i - (N+1))x_i,$$

lo que pone de manifiesto que G es una función lineal de las rentas individuales.

2) *Índices de Gini generalizados (Kakwani, 1980; Yitzhaki, 1983)*

Son una familia uniparamétrica de medidas de desigualdad, cada una de las cuales pondera de forma distinta las diferencias de Lorenz (o las diferencias entre las rentas y la media) a lo largo de la distribución. Si en $\mathscr{M}$ se consideran las ponderaciones

$$\prod(p) = 1 - (\beta + 1)(1 - p)^{\beta} \text{ o bien}$$
$$\pi(p) = \beta(\beta + 1)(1 - p)^{\beta-1}, \ \beta>0, 0<p<1, \quad [12]$$

resulta la familia $\{G_\beta\}_{\beta>0}$ de los Gini generalizados. Vienen dados por:

$$G_\beta = \beta(\beta + 1) \int_0^1 (p - L(p))(1 - p)^{\beta-1} dp$$

Cada valor de $\beta > 0$ identifica un elemento de la familia y para $\beta = 1$ se obtiene el índice de Gini ordinario. Si el parámetro β cumple $0 < \beta < 1$, el índice correspondiente a través de su esquema de ponderación asigna mayor peso a las diferencias de Lorenz en la cola superior de la distribución. Cuando $\beta > 1$ sucede lo contrario, ya que las ponderaciones son funciones decrecientes de p y, en este caso, los índices satisfacen el PPT. El índice de Gini ($\beta = 1$) separa ambas situaciones asignando idéntico peso a todas las diferencias de Lorenz. Por tanto, el parámetro β puede interpretarse como una medida de aversión a la desigualdad o de valoración distributiva. Al aumentar β también lo hacen los pesos asignados a las rentas bajas en el proceso de agregación de la curva de Lorenz y para sus valores extremos se puede demostrar que $G_\beta \to 0$ cuando $\beta \to 0$, mientras que si $\beta \to \infty$ entonces $G_\beta \to 1 - x_1/\mu$ siendo x_1 la renta mínima de la distribución. Por tanto, la variación de β permite pasar de la indiferencia hacia la desigualdad, asignándole un valor nulo, a hacerla depender de la renta del más pobre de la población.

Para una distribución discreta $X = (x_1, x_2, ..., x_N)$, el índice viene dado por:

$$G_{\beta,x} = 1 - \frac{1}{N\mu} \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{(N-i+1)^{\beta+1} - (N-i)^{\beta+1}}{N^{\beta}}\right] x_i, \ \beta>0. \quad [13]$$

En particular, el coeficiente de Gini ordinario ($\beta = 1$) se expresa alternativamente como:

$$G_x = 1 - \frac{1}{N\mu} \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{2(N-i)+1}{N}\right] x_i. \quad [14]$$

3) <u>El coeficiente de variación</u>.

Para $X \in D^N$, siendo $\mu_X \neq 0$, se define el coeficiente de variación, CV_X, como el cociente entre la desviación típica, σ_X, y la media μ_X:

$$CV_X = \frac{\sigma_X}{\mu_X} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \mu)^2/N}}{\sum_{i=1}^{N} x_i/N}. \quad [15]$$

En el caso continuo,

$$CV_X = \sqrt{\int_0^\infty \left(\frac{x}{\mu_x} - 1\right)^2 f(x)dx}. \quad [16]$$

Es un índice muy utilizado en la literatura. Es nulo si la renta está igualmente distribuida entre los individuos de la población y $\sqrt{N-1}$ cuando la concentración es máxima. El efecto de una transferencia progresiva solo depende de la diferencia de rentas entre el donante y el perceptor, con independencia de sus niveles o de su situación en la distribución. No cumple, por tanto, el PPT.

4) *Índices de entropía generalizada.*

Esta familia de índices paramétricos de desigualdad fue propuesta por Theil (1967) a partir del enfoque basado en la teoría de la información. Estos índices constituyen una familia tanto por su origen común como porque poseen propiedades normativas diferenciadas de los anteriores.

En termodinámica, la entropía es una medida del desorden. Cuando se aplica a las distribuciones de renta, la entropía (desorden) se refiere a las desviaciones respecto de la igualdad perfecta.

Si $X \in D^N$, las expresiones de estos índices, dependientes de un parámetro $c \in \mathbb{R}$, son:

$$T_c(X) = \frac{1}{N}\frac{1}{c(c-1)}\sum_{i=1}^{N}\left[\left(\frac{x_i}{\mu_x}\right)^c - 1\right], c \neq 0,1 \qquad [17]$$

$$T_c(X) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[\left(\frac{x_i}{\mu_x}\right)\ln\left(\frac{x_i}{\mu_x}\right)\right], c = 1 \qquad [18]$$

$$T_c(X) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[\ln\left(\frac{\mu_x}{x}\right)\right], c = 0 \qquad [19]$$

En términos continuos

$$T_c(X) = \frac{1}{c(c-1)}\int_0^\infty\left[\left(\frac{x}{\mu_x}\right)^c - 1\right] f(x)dx, c \neq 0,1 \qquad [20]$$

$$T_c(X) = \int_0^\infty\left(\frac{x}{\mu_x}\right)\ln\left(\frac{x}{\mu_x}\right) f(x)dx, c = 1 \qquad [21]$$

$$T_c(X) = \int_0^\infty \ln\left(\frac{\mu_x}{\bar{x}}\right) f(x)dx, c = 0, c = 0 \qquad [22]$$

Aunque c puede ser en principio cualquier número real, desde un punto de vista operacional se supone que c es no negativo dado que si $c<0$ los índices no están definidos cuando hay rentas nulas. Por otra parte, para valores positivos del parámetro c los índices están acotados superiormente, siendo $\frac{N^{c-1}-1}{c(c-1)}$ para $c \neq 1$ y ln (N) si $c = 1$ las cotas superiores.

A través de los valores de c se incorporan diferentes percepciones de la desigualdad. Shorrocks (1980) muestra que cuando c decrece, el índice es más sensible a las transferencias en la cola inferior de la distribución (rentas «bajas«). En el límite, cuando $c \rightarrow -\infty$ el índice concentra su atención en el extremo inferior de la distribución. Por el contrario, al aumentar c el índice es más sensible a las transferencias en la parte superior de la distribución. En el límite, conforme $c \rightarrow \infty$, el índice concentra su interés en el extremo superior de la distribución.

La familia incluye al índice de entropía de Theil ($c = 1$), la desviación logarítmica media ($c = 0$) y una transformación monótona del coeficiente de variación, ya que si $c = 2$, se verifica $T_2(X) = 1/2\ CV_x^2$, es decir, coincide con la mitad del cuadrado del coeficiente de variación.

A pesar de ser índices «importados» desde otro contexto, son muy utilizados en la literatura al presentar gran parte de las propiedades que se consideran deseables para una medida de desigualdad. Shorrocks (1980) demuestra que una función $I: D \rightarrow \mathbb{R}$ cumple las propiedades 1, 2, 3, 4, 7*, 8 y la de descomponibilidad aditiva si, y solo si, es un índice de esta familia.

5) *Familia de índices de Atkinson*

Aunque Dalton (1920) inicia el enfoque normativo en la evaluación de la desigualdad, fueron Kolm (1969) y Atkinson (1970) quienes señalando las limitaciones del índice de Dalton y basándose en la teoría de la decisión bajo incertidumbre de Pratt (1964), contribuyen de forma decisiva a establecer el paradigma vigente sobre desigualdad y bienestar.

Utilizan como concepto de referencia la denominada renta igualitaria equivalente (RIE), x_e, que se define como el nivel de renta que si fuese percibido por todos y cada uno de los individuos de la población, la distribución igualitaria resultante proporcionaría el mismo bienestar que la distribución existente. Es decir, si $W(\cdot)$ es la FBS y $X \in D^N$, se cumple:

$$W(x_e, x_e, \ldots, x_e) = W(x_1, x_2, \ldots, x_N). \qquad [23]$$

Para una FBS de tipo utilitarista en la que la función de utilidad, $u(\cdot)$, es la misma para todos los individuos, la RIE vendría dada de forma implícita por la condición:

$$Nu(x_e) = \sum_{i=1}^{N} u(x_i). \qquad [24]$$

Si $u(\cdot)$ es continua, creciente y estrictamente cóncava (utilidad marginal decreciente) se verifica $x_e < \mu$. Con ello, $C = \mu - x_e$ sería el coste per cápita de la desigualdad y NC la renta que se ahorraría, sin pérdida de bienestar, si la renta restante se distribuyese de forma igualitaria.

A partir de lo anterior, Atkinson (1970) propone la siguiente medida de desigualdad:

$$A = 1 - \frac{x_e}{\mu} = \frac{\mu - x_e}{\mu} = \frac{C}{\mu}, \quad [25]$$

de manera que si $x_e = \mu$ es $A = 0$ y si $x_e \to 0$, entonces $A \to 1$, por lo que $A \in [0,1]$.

El índice A es el coste de la desigualdad relativizado con la renta media. Por ejemplo, si $A = 0{,}35$ entonces x_e es un 65 por 100 de la renta media, por lo que la sociedad podría disfrutar del mismo bienestar que el existente con solo el 65 por 100 de la renta total mediante una redistribución adecuada.

Atkinson (1970) selecciona una familia de funciones de utilidad cuya aversión a la desigualdad es constante (13) para garantizar que A sea un índice relativo (14). Con ello la FBS de referencia es:

$$W_\alpha(X) = \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha}, \ \alpha \neq 1, \ W_1(x) = \sum_{i=1}^{N} \ln(x_i). \quad [26]$$

A partir de la igualdad anterior y de [23] se obtiene x_e lo que junto a [25] proporciona la expresión de la familia de índices de Atkinson:

$$A_\alpha(X) = 1 - \left[\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{N}\left(\frac{x_i}{\mu_x}\right)^{1-\alpha}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \text{para } \alpha > 0, \alpha \neq 1 \quad [27]$$

$$A_1(X) = 1 - \prod_{i=1}^{N} \left(\frac{x_i}{\mu_x}\right)^{\frac{1}{N}}. \quad [28]$$

Si la renta es una variable continua con densidad f(·), se tiene:

$$A_\alpha(X) = 1 - \left[\int_0^\infty \left(\frac{x}{\mu_x}\right)^{1-\alpha} f(x)dx\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \text{para } \alpha > 0, \alpha \neq 1 \quad [29]$$

$$A_1(X) = 1 - \frac{1}{\mu_x} \exp\left\{\int_0^\infty \ln(x) f(x)dx\right\} \quad [30]$$

El parámetro $\alpha > 0$ mide el grado de aversión a la desigualdad. Para $\alpha = 0$ la sociedad es indiferente a la desigualdad y para cualquier distribución es $A = 0$. En este caso es $x_e = \mu$ y las distribuciones se ordenan según su renta total o media. En el otro extremo, cuando $\alpha \to \infty$ obtenemos la FBS de Rawls que solo se interesa por la situación del individuo más pobre, de manera que $x_e \to x_1$ y $A \to 1 - (x_1/\mu)$. En este sentido los índices A_α presentan un comportamiento análogo a los índices de Gini generalizados G_β.

A efectos de su utilización en el trabajo empírico, es importante destacar que los índices de Theil, T_c, y los índices de Atkinson, A_α, son ordinalmente equivalentes para los valores $c = 1 - \alpha, \alpha > 0$.

Conviene observar que aunque en apariencia los índices de Atkinson o los de entropía no presentan una relación directa con la curva de Lorenz, ambas familias pueden obtenerse directamente de dicha curva. Basta observar que las expresiones de estos índices dependen de las pendientes de L(·), x_i/μ, o de sus inversas, μ/x_i, en los cuantiles correspondientes a los niveles de renta x_i.

6) *S80/S20 o ratio quintil*

Es el cociente entre los volúmenes totales de renta que perciben el 20 por 100 de la población más rica y el 20 por 100 la población más pobre. A partir de la curva de Lorenz se expresaría como (1 – L(80))/L(20). Es uno de los indicadores, junto al índice de Gini, que proporciona Eurostat como medida de desigualdad.

2.2. *Índices no Lorenz consistentes*

Entre las medidas que *no son Lorenz consistentes*, pero sí de uso frecuente en la literatura aplicada, citaremos:

1) *La desviación relativa respecto a la media*.

Es la proporción que representa, respecto a la renta total, la suma de las diferencias, en valor absoluto, entre las rentas individuales y la media. Si $X \in D^N$,

$$DRM_X = \frac{\sum_{i=1}^{N} |x_i - \mu_X|}{N\mu_X}. \quad [31]$$

Para variables continuas,

$$DRM_X = \frac{1}{\mu_X}\int_0^\infty |x - \mu_x| f(x)dx. \quad [32]$$

Es un índice relativo cuya limitación principal es que no cumple el principio de transferencias de Pigou-Dalton. En particular las transferencias progresivas entre dos individuos cuyas rentas sean ambas superiores o ambas inferiores a la renta media, no afectan al valor del índice.

Tiene una interpretación geométrica sencilla en términos de la curva de Lorenz: es el doble de la máxima distancia vertical entre dicha curva y la línea de la igualdad (Lambert, 1996, cap. 2.4). Dado que la diferencia $p - L(p)$ alcanza su máximo cuando $1 = d(L(p))/dp$, lo que implica $x = \mu$, el valor de esa distancia máxima es $S = F(\mu) - L(F(\mu))$. $S = DMR/2$ es una medida de desigualdad conocida en la literatura como ratio de Pietra o coeficiente de Schutz (1951). El índice S toma sus valores en el intervalo [0, 1], no cumple el principio de transferencias de Pigou-Dalton, pero tiene una propiedad interesante: mide la proporción de renta total que tendría que ser transferida desde las rentas situadas por encima de la media a las situadas por debajo de la misma para conseguir una distribución igualitaria (Lambert, 1996, cap. 2.4).

Los índices DRM y S, a pesar de su estrecha relación con la curva de Lorenz, no pertenecen a la familia $\mathscr{L}$, aunque sí son elementos de $\mathscr{M}$. Como medida lineal, el índice DRM se obtiene a partir de la expresión [7] mediante la ponderación $\prod(p) = -\frac{1}{2}$, $p < F(\mu)$, $\prod(F(\mu))\ F(\mu) - \frac{1}{2}, = \prod(p)) = \frac{1}{2}$, $p > F(\mu)$.

2) *Varianza y desviación típica de los logaritmos*

La varianza y la desviación estándar del logaritmo de la variable renta (positiva), son índices relativos de desigualdad. Si $X \in D^N$, el primero de ellos se expresa como:

$$VL_X = \frac{\Sigma_{i=1}^{N}(\ln(x_i) - (\ln(g_x))^2}{N}, \qquad [33]$$

siendo $g_x = (\prod_{i=1}^{N} x_i)^{1/N}$ la media geométrica de la distribución.

En el caso continuo,

$$VL_X = \int_0^\infty (\ln(x) - \mu_{\ln(x)})^2\ f(x)dx, \qquad [34]$$

donde $\mu_{\ln(x)} = \left(\int_0^\infty \ln(x)f(x)dx\right)$ es la media de la variable $\ln(X)$.

La raíz cuadrada positiva de VL_X es la desviación estándar de los logaritmos. Ambos índices son nulos en caso de equidistribución, pero no están acotados superiormente. Es más, en el caso de concentración máxima no están definidos (divergen si algún $x_i \to 0$). Estos índices no verifican el principio de transferencias de Pigou-Dalton.

Hay que señalar que tanto el índice DRM como VL fueron muy utilizados en los comienzos de la literatura sobre la medición de la desigualdad, pero su uso decayó al ir dando más importancia a los aspectos normativos (Atkinson, 1970; Sen, 1973).

IV. FUNCIONES DE BIENESTAR SOCIAL. RELACIÓN CON LOS ÍNDICES DE DESIGUALDAD (15)

Como se indicó en la introducción, consideramos FBS definidas directamente sobre el conjunto de distribuciones de renta admisibles, sin hacer referencia a las funciones de utilidad individuales. Esto es, $W:D \to \mathbb{R}$, siendo $W(X) = W(x_1, ..., x_N) = W_x$ el nivel de bienestar asociado a la distribución X. Estas FBS evalúan las distribuciones en función de su volumen de renta, medido por la renta media, y de su dispersión, valorada por algún índice de desigualdad. Es decir, $Wx = \varphi(\mu_x, I_x)$. Se supone que $\partial\varphi/\partial\mu > 0$ y $\partial\varphi/\partial I < 0$, lo que pone de manifiesto el posible conflicto entre la renta total y su reparto.

Para comparar distribuciones de renta en términos de bienestar, de forma análoga a como se procede cuando la comparación es en términos de desigualdad, se utiliza la curva de Lorenz generalizada definida en [5] o [6]. Si $(X, Y) \in D \times D$, se dice que X domina a Y según la curva de Lorenz generalizada, $X \geq_{LG} Y$, si, y solo si $LG_X(p) \geq LG_Y(p)$ para todo $p \in [0,1]$. La dominancia es estricta, $X >_{LG} Y$, si para algún $p \in (0,1)$ se cumple $LG_X(p) > LG_Y(p)$.

Shorrocks (1983) y Kakwani (1984) proporcionan un resultado robusto para la familia de FBS que satisfacen las propiedades de monotonía, simetría, S-concavidad y réplica de poblaciones. La monotonía implica una preferencia por mayores rentas con independencia de la variación de la desigualdad que ello suponga. La simetría y el principio de población tienen ambas, en este contexto, un significado análogo al que se les da en los índices de desigualdad. La S-concavidad incorpora una preferencia por la igualdad. En concreto, se ha de cumplir $W(BX) \geq W(X)$, para toda $X \in D^N$, siendo B cualquier matriz biestocástica de orden N (elementos no negativos cuya suma por filas o columnas es la unidad), lo que implica que la redistribución aumenta el bienestar. Sea W* la familia de FBS con estas propiedades. El resultado al que nos referimos establece que para cualquier par de distribuciones $(X,Y) \in D \times D$, se cumple la equivalencia:

$$(W_X \geq W_Y, \text{ para toda } W \in W^*) \Leftrightarrow (X \geq_{LG} Y). \qquad [35]$$

En consecuencia, para distribuciones entre las que exista dominancia de Lorenz generalizada, es posible realizar comparaciones en términos de bienestar, aunque sus rentas medias sean distintas o se crucen sus curvas de Lorenz ordinarias, pudiéndose obtener conclusiones cuando mayor (menor) renta media compense mayor (menor) desigualdad.

La relación $\geq_{LG}$ induce en D un orden parcial. No son comparables aquellas distribuciones cuyas curvas de Lorenz generalizadas se cruzan, en cuyo caso no resulta una conclusión unánime en términos de bienestar. Si no se cumple $X \geq_{LG} Y$ ni tampoco $Y \geq_{LG} X$, existen FBS de la familia W*, W_1 y W_2, tales que $W_{1,X} > W_{1,Y}$ y $W_{2,X} < W_{2,Y}$.

Entre FBS e índices de desigualdad no existe, en general, una correspondencia biunívoca (Esteban, 1976). Un mismo índice puede derivarse de distintas FBS. Blackorby y Donaldson (1978) demuestran que esta situación no se plantea cuando la FBS es una función homogénea de primer grado, $W(\sigma x_1. \sigma x_2, ..., \sigma x_N) = \sigma W(x_1, x_2, ..., x_N)$, $\sigma > 0$. Es decir, la FBS es de tipo cardinal. Este tipo particular de funciones de bienestar permiten expresar la valoración social de una distribución como una suma ponderada de sus rentas.

Una relación sencilla e intuitiva entre bienestar y desigualdad resulta a partir del enfoque de Sen (1973), que generaliza el de Dalton-Kolm-Atkinson prescindiendo del carácter utilitarista de las FBS. Para $W \in W^*$ define la renta igualitaria equivalente (RIE), x_e, de forma implícita mediante la expresión [23], siendo $x_e < \mu$ debido a la S-concavidad de W. La medida de desigualdad de Sen, S, se define como:

$$S = 1 - \frac{x_e}{\mu}. \qquad [36]$$

La única diferencia entre S y la medida de Atkinson (1970), A, es que ahora x_e no depende de las utilidades individuales. Por supuesto, si $W = \Sigma_{i=1}^{N} u(x_i)$ entonces S = A.

El índice S es el coste de la desigualdad relativizado con la renta media, mientras que x_e se puede interpretar como la renta media ajustada por la desigualdad. Con ello, Nx_e sería la renta total ajustada por la desigualdad, lo que se puede considerar como una medida del bienestar asociada a una distribución de renta, que combina volumen de renta y distribución. Si para $X \in D$, $W_x = Nx_e$, es la medida del bienestar asociado a la distribución X, teniendo en cuenta la expresión [36], se obtiene:

$$W_x = Nx_e = N\mu_x(1 - S_x), \qquad [37]$$

o en términos de bienestar medio,

$$w_x = W_x/N = \mu_x(1 - S_x). \qquad [38]$$

Un enfoque alternativo, en el que el bienestar de una distribución de renta viene dado por la RIE asociada a una medida lineal de desigualdad (clase $\mathscr{M}$), es el propuesto por Yaari (1987, 1988). Su planteamiento se basa en la distribución de preferencias sociales, Φ, de manera que si F(·) es la función de distribución de la renta, la FBS de Yaari viene dada por:

$$W_\Phi = \int_0^\infty x d\Phi(F(x)) = \int_0^1 F^{-1}(p) d\Phi(p) \qquad ([39]$$

En términos discretos, si el vector de rentas es $X = (x_1, x_2, ..., x_N)$, la igualdad anterior se puede escribir como:

$$W_{\Phi,x} = \sum_{i=1}^{N} \left(\Phi(^i/_N) - \Phi\left(^{(i-1)}/_N\right)\right) x_i. \qquad [40]$$

W_Φ es aditiva y lineal en las rentas, una suma ponderada de las mismas en la que las ponderaciones dependen de la posición o rango que las rentas asignan a los individuos en la distribución. En el caso continuo, si μ_x es la renta media asociada a $F_x(\cdot)$ y $L_x(p)$ su curva de Lorenz, integrando por partes en [39] se obtiene la siguiente expresión (16):

$$W_{\Phi,x} = \mu_x (1 - I_{\Phi,x}), \qquad [41]$$

siendo:

$$I_{\Phi,x} = \int_0^1 (p - L_x(p)) w(p) dp, \; w(p) = -\Phi''(p) \qquad [42]$$

La FBS W_Φ es la RIE asociada a una medida lineal de Mehran (1976) como las definidas mediante [8], siendo $\mu_x I_{\Phi,x}$ la pérdida de bienestar social debida a la desigualdad. Las igualdades en [42] proporcionan la expresión del índice y una relación explícita entre la distribución de preferencias y el esquema de ponderación de las diferencias de Lorenz.

Es evidente que $I_{\Phi,x} \in \mathscr{L}$, es decir, es consistente con el criterio de ordenación de Lorenz si y solo si la distribución de preferencias es estrictamente cóncava ($\Phi''(p) < 0$), en cuyo caso se verifica el principio de transferencias de Pigou-Dalton y $W_\Phi \in W^*$.

Como aplicación vamos a obtener las distribuciones de preferencias y las FBS de los índices de Gini generalizados. Teniendo en cuenta cómo ponderan estos índices las diferencias de Lorenz, igualdad [12], la relación [41] y que las distribuciones de preferencias pasan por los puntos (0, 0) y (1, 1), resulta que para el Gini generalizado de parámetro $\beta > 0$ es $\Phi_\beta(p) = 1 - (1 - p)^{\beta+1}$. De la igualdad [40], se obtiene:

$$W_{\Phi_\beta} = \frac{1}{N^{\beta+1}} \sum_{i=1}^{N} ((N - i + 1)^{\beta+1} - (N - i)^{\beta+1})x_i. \quad [43]$$

A partir de esta expresión, utilizando [41], resulta la expresión discreta de G_β, igualdad [13]. En particular para $\beta = 1$, tenemos la FBS del índice de Gini ordinario:

$$W_G = W_{\Phi 1} = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^{N} (2(N - i) + 1)xi, \quad [44]$$

media ponderada de las rentas en la que las ponderaciones $\frac{2N-1}{N^2}, \frac{2N-3}{N^2}, \ldots, \frac{3}{N^2}, \frac{1}{N^2}$, disminuyen al aumentar el nivel de renta. La expresión discreta del índice de Gini dada por la ecuación [14] se obtiene de [41] y de la igualdad anterior.

La propuesta de Yaari (1987, 1988) permite incorporar las preferencias sociales a la FBS, mediante Φ, y derivar de ella el correspondiente índice de desigualdad, cuyas propiedades dependen de las de la distribución de preferencias.

V. APLICACIONES DE LOS ÍNDICES DE DESIGUALDAD. LA REDISTRIBUCIÓN IMPOSITIVA

Los índices de desigualdad tienen múltiples aplicaciones. Algunas de ellas han sido mencionadas a lo largo de las secciones anteriores y otras han podido ser intuidas por el lector. Sin ánimo de ser exhaustivos, mencionamos las siguientes:

- Permiten el análisis comparado del grado de desigualdad en el reparto de la renta en sociedades diferentes en un momento del tiempo. Estas comparaciones van más allá del mero cotejo del nivel de desarrollo, medido a través de la renta per cápita, proporcionando evaluaciones del bienestar.

- Posibilitan el estudio de la evolución de la desigualdad a lo largo del tiempo en una determinada sociedad.

- Se puede analizar qué parte del cambio en desigualdad se debe al crecimiento progresivo de la renta (favorable a las rentas bajas) y qué parte a los cambios de posición de los individuos en la distribución.

- Facilitan la valoración del efecto de determinadas políticas redistributivas mediante la comparación de los niveles de desigualdad antes y después de la aplicación de las mismas. En la siguiente subsección se desarrolla, de forma más detallada, la valoración del efecto redistributivo de la imposición progresiva sobre la renta.

- Permiten analizar la desigualdad observada separando la que deriva de la desigualdad de oportunidades de la generada por el esfuerzo individual.

- Se formulan medidas de movilidad basadas en el concepto de reducción de la desigualdad en el largo plazo.

- Se proponen medidas de polarización que tienen en cuenta la concentración de la renta en polos focales en cuya definición intervienen necesariamente índices de desigualdad.

- Permiten analizar la desigualdad en el ciclo vital de un individuo: desigualdad intertemporal.

- La descomposición de la desigualdad global por factores o por grupos de población proporciona una información más completa sobre la estructura y magnitud de la desigualdad. La primera permite conocer la contribución de las distintas fuentes de renta a la desigualdad total, mientras que la descomposición por grupos proporciona la distinción entre desigualdad entre grupos y desigualdad dentro de esos grupos, así como la contribución de cada una al total.

- Las propiedades de descomposición de las medidas de desigualdad facilitan el estudio de la variación en la desigualdad entre regiones para medir el grado de convergencia interregional.

- Permiten la propuesta de indicadores de bienestar que incorporen aspectos distributivos. Por ejemplo, el índice de desarrollo humano ajustado por la desigualdad (IDHD).

Este índice combina, para cada país, datos de renta, salud y educación teniendo en cuenta la dispersión existente en cada una de estas dimensiones, para lo que utiliza el índice de Atkinson .

La redistribución impositiva

Una de las principales aplicaciones de la evaluación de la desigualdad es el análisis del impacto sobre la distribución de la renta de las diferentes medidas de política económica y, especialmente, de aquellas cuya finalidad es la reducción de la desigualdad o de la pobreza. Veremos con cierto detalle el modo de valorar la capacidad redistributiva del impuesto sobre la renta mediante una metodología que, con alguna modificación, sería aplicable a otros tributos o a las transferencias públicas de carácter monetario (17).

Sea $t(\cdot)$ un impuesto que grava las rentas de la distribución $X \in D$ y supongamos que la carga fiscal que recae sobre cada individuo solo depende de su renta inicial (18). Si $L_X(\cdot)$ y $L_{X-T}(\cdot)$ son, respectivamente, las curvas de Lorenz de las distribuciones de renta antes y después de impuestos, una forma natural de evaluar el efecto del impuesto sobre la desigualdad sería comparar ambas curvas o, lo que es más restrictivo, considerar la variación de un determinado índice de desigualdad en ambas distribuciones.

Si $F(\cdot)$ es la función de distribución de la renta inicial, $\mu = \int_0^\infty x dF(x)$ es la renta media. Con ello, si T es la recaudación total del impuesto, $p = T/N\mu$ es su tipo medio global, siendo N el número de contribuyentes, y $\mu(1-p)$ es la renta media después de impuestos. Por tanto, las expresiones de las curvas de Lorenz asociadas a las distribuciones de renta antes y después de impuestos son:

$$L_X(p)=\frac{1}{\mu}\int_0^x s dF(s), L_{X-T}(p)=\frac{1}{\mu(1-p)}\int_0^x (s-t(s))dF(s), p=F(x). \quad [45]$$

Si $t(\cdot)$ es un impuesto progresivo para todo nivel de renta, su tipo medio es una función creciente, un resultado debido a Jakobsson (1976), Fellman (1976) y Kakwani (1977) permite asegurar que la curva de Lorenz de la renta disponible domina a la de la renta inicial: $L_{X-T}(p)>L_X(p)$, $p \in (0,1)$. Es decir, $(X-T)>_L X$ por lo que cualquier índice de desigualdad consistente con el criterio de ordenación inducido por la curva de Lorenz (clase $\mathcal{L}$) indicará que la distribución de renta después de impuestos es más igualitaria que la existente antes de aplicar el impuesto.

Localmente, la diferencia $L_{X-T}(p) - L_X(p)$ nos indica para cada $p \in (0,1)$ la capacidad redistributiva del impuesto. Es la fracción de la renta total después de impuestos que se traslada desde los niveles de renta altos, el 100(1–p) por 100 superior, hacia los bajos, el 100p por 100 inferior. Esta traslación es consecuencia de que la progresividad traslada, en sentido inverso, parte de la carga tributaria.

Cuando las diferencias $L_{X-T}(p) - L_X(p)$ se ponderan y se suman a lo largo de la distribución se obtiene la variación de la desigualdad como consecuencia de la aplicación del impuesto, evaluada mediante un determinado índice. Por ejemplo, si utilizamos las medidas lineales de la clase $\mathcal{M}$, a partir de [8], resulta:

$$I_X - I_{X-T} = \int_0^1 [L_{X-T}(p)-L_X(p)]\, \pi(p)dp. \quad [46]$$

En particular, cuando la ponderación $\pi(\cdot)$ es positiva, el efecto redistributivo del impuesto se evalúa a través de índices Lorenz-consistentes, clase $\mathcal{L}$. Si $\pi(p) = 2$ se obtiene el índice clásico de Reynolds-Smolensky, I_{RS}, dado por:

$$I_{RS} = 2\int_0^1 [L_{X-T}(p)-L_X(p)]dp = G_X - G_{X-T}. \quad [47]$$

Si en la expresión [46] el peso es de la forma $\pi(p) = \beta(\beta+1)(1-p)^{\beta-1}$, $\beta > 0$, $0 < p < 1$, el efecto redistributivo se valora mediante los Gini generalizados, expresión [13]. En este caso, para cada $\beta>0$, la variación de la desigualdad vendría dada por:

$$I_{RS,\beta} = G_{\beta,X} - G_{\beta,X-T} = \beta(\beta+1) \int_0^1 (L_{X-T}(p)-L_X(p))\,(1-p)^{\beta-1}dp. \quad [48]$$

Dado que el parámetro β es una medida de valoración distributiva, es posible asignar mayor peso a las diferencias entre curvas de Lorenz en las rentas bajas, al aumentar $\beta > 1$, o en las rentas altas, si es $0 < \beta < 1$.

Otros índices de $\mathcal{L}$, no lineales en las rentas, utilizados para medir la capacidad redistributiva de un impuesto son los de la familia de Atkinson, los de entropía o el coeficiente de variación. Por ejemplo, Kiefer (1985) propone como coeficiente $I_{KI,\alpha} - A_{X,\alpha} - A_{X-T,\alpha}$, la variación del índice de Atkinson como medida de la redistribución ocasionada por un impuesto. La elección de $\alpha > 0$, parámetro de aversión a la desigualdad, determina el peso que se quiera asignar a extremos de la distribución.

Algunos autores identifican el efecto redistributivo de un impuesto con el incremento relativo de la igualdad que ocasiona su aplicación. En este sentido, Blackorby y Donaldson (1984) proponen el índice $I_{BD,\alpha} =, \frac{A_{X,\alpha} - A_{X-T,\alpha}}{1-A_{X,\alpha}}$ que representa la proporción en que aumenta la igualdad valorada mediante $1 - A_\alpha$. Es evidente que este modo de proceder es aplicable a cualquier índice.

Aunque un impuesto progresivo reduzca la desigualdad existente en la distribución de renta sobre la que incide, ello no da lugar a un mayor bienestar social (19). Un impuesto positivo, con independencia de su carácter, disminuye el bienestar social evaluado con cualquier FBS de la familia W*. En efecto, comparando las curvas de Lorenz generalizadas de las distribuciones de renta antes y después de impuestos, a partir de [45] se tiene:

$$LG_{X-T}(p) = \mu(1-p)L_{X-T}(p) = \int_0^x (s-t(s))dF(s)$$
$$< \int_0^x sdF(s) = \mu L_X(p) = LG_x(p).$$

Es decir, $X >_{LG} (X - T=)$. El teorema de Shorrocks (1983) y Kakwani (1984), equivalencia [35], asegura que $W_X > W_{X-T}$ para toda $W \in W^*$.

A pesar de lo anterior, la progresividad de un impuesto garantiza una pérdida de bienestar menor que la derivada de procedimientos alternativos para obtener la misma recaudación a partir de una distribución de renta dada. Si $t(\cdot)$ es una tarifa progresiva cuyo tipo global medio es p, $t_p(x) = px$, es el impuesto proporcional equivalente en recaudación. Es evidente que la aplicación de $t_p(\cdot)$ no modifica la desigualdad relativa de la distribución de rentas, de manera que $L_{X-P}(p) = L_X(p)$. Al comparar las curvas de Lorenz generalizadas de las distribuciones de renta disponible, resulta

$$LG_{X-T}(p) = \mu(1-p)L_{X-T}(p) > \mu(1-p)L_X(p)$$
$$= \mu(1-p)L_{X-P}(p) = LG_{X-P}(p).$$

Por tanto, $(X-P) >_{LG} (X-T)$ y aplicando de nuevo Shorrocks (1983)-Kakwani (1984), para toda $W \in W^*$ es $W_{X-T} > W_{X-P}$.

Cuando las FBS W_{X-T} y W_{X-P} y se expresan ambas mediante las RIE asociadas a un índice relativo de desigualdad cuyo valor en las distribuciones de renta antes y después de impuestos son I_X e I_{X-T}, respectivamente, se tiene:

$$W_{X-T} = \mu(1-p)(1-1_{X-T}),\ W_{X-P} = \mu(1-p)(1-I_X),$$

por lo que,

$$W_{X-T} - W_{X-P} = \mu(1-p)(I_x - I_{x-T}).$$

La igualdad anterior indica que cuando el impuesto es progresivo un aumento del efecto redistributivo sin que varíe la recaudación (permanece fijo) implica mayor nivel de bienestar en relación al impuesto proporcional equivalente, o, de otro modo, menor es la reducción de bienestar respecto a la no imposición. El posible conflicto entre redistribución y recaudación, en términos de bienestar, se plantea cuando varía p, pues en ese caso también lo hace la renta media neta, $\mu(1-p)$, y el efecto de la variación de $I_X - I_{X-T}$ sobre $W_{X-T} - W_{X-P}$ sería incierto.

VI. CONSIDERACIONES FINALES

Quizá la herramienta idónea para iniciar el análisis de la desigualdad en una distribución de rentas sea la curva de Lorenz. La observación de sus características más significativas, grado de proximidad a la línea de la igualdad y la evolución de su pendiente, proporciona una visión general e intuitiva de la distribución y permite examinar las participaciones en la renta total de diferentes grupos de la población.

Para obtener un valor numérico de la dispersión en el reparto de la renta hay que recurrir a los índices de desigualdad. Al no existir razones objetivas para considerar una medida superior a otra es recomendable realizar valoraciones según distintos criterios distributivos. La selección de las medidas de desigualdad depende de las preferencias del evaluador social y de la naturaleza de cada caso empírico, siendo imprescindible el conocimiento de las propiedades de los índices utilizados y de los juicios de valor que incorporan.

Cuando se aplica un conjunto de índices a un problema concreto, como la ordenación de un conjunto de distribuciones según su nivel de desigualdad, la coincidencia de resultados puede ser deseable. Sin embargo, la posible obtención de resultados discordantes según el índice permite extraer conclusiones incluso más interesantes y enriquecedoras, teniendo en cuenta las características de las diferentes medidas, que las proporcionadas por los casos robustos. Estas mismas consideraciones se extienden a la evaluación del efecto redistributivo de un impuesto o de una transferencia y de su incidencia sobre el bienestar.

NOTAS

(1) Los interesados en estas cuestiones encontrarán un tratamiento muy adecuado de las mismas y una síntesis de la literatura con abundantes referencias en COWELL (1995), LAMBERT (1996) y GOERLICH y VILLAR (2009). Para una exposición sencilla, centrada en la desigualdad, véase BÁRCENA (2011).

(2) La curva de Lorenz se puede construir a partir de los datos contenidos en el cuadro n.º 1 (por tramos), o a partir de los microdatos, agregando la renta de cada persona y calculando los porcentajes acumulados para cada persona. Esta última forma de proceder nos llevaría a una curva de Lorenz con un trazado más suave, ya que contaríamos con más información que en el caso de trabajar con la información agregada por deciles.

(3) Esta restricción en la práctica se solventa en muchos casos modificando los datos de base para eliminar valores negativos o incluso nulos (Jenkins, 1997).

(4) En el caso continuo con el cambio de variable $F^{-1}(t)$ se obtiene la expresión [2]. En el caso discreto basta tener en cuenta que $F^{-1}(p) = x_i$, para $\frac{i-1}{N} \leq p < \frac{i}{N}$, $i = 1,...N$ y que la integral de una función de este tipo (escalonada) es la suma de áreas de rectángulos.

(5) Este resultado se demuestra en LAMBERT (1996), lema 2.1.

(6) Es evidente que incrementos de renta que dejen invariante o disminuyan la desigualdad absoluta, implican una disminución de la desigualdad relativa: las rentas bajas habrán crecido en mayor proporción que las altas.

(7) Existen propuestas teóricas que se sitúan en posiciones intermedias entre el concepto absoluto y relativo de desigualdad. Estas propuestas no se revisarán en este artículo, pero pueden consultarse en KOLM (1976 a y b), MAASOUMI (1986), BOSERT y PFINGSTEIN (1990), PFINGSTEIN y SEIDL (1997) y DEL RÍO y RUIZ-CASTILLO (2000).

(8) Si $X \geq_L Y$ e $Y \geq_L X \Rightarrow L_X(p) = L_Y(p)$, para todo $p \in [0,1]$. Si se cumpliese además, $\mu_X = \mu_Y$, entonces X e Y son distribuciones idénticas.

(9) Para estas cuestiones véase THISTLE (1989). En MULIERE y SCARSINI (1989) se estudia de forma detallada la relación entre dominancia estocástica y medidas de desigualdad.

(10) Si se consideran otras características del individuo, además de su renta, es necesario recurrir a una propiedad de simetría más general, aplicable a comparaciones multidimensionales (ATKINSON y BOURGUIGNON, 1982).

(11) Esta propiedad no impone una cota superior al índice de desigualdad, si bien algunos índices de uso habitual toman sus valores en el intervalo [0, 1]. Cuando un índice no cumple esta condición pero presenta un máximo finito dividiéndolo entre dicho máximo se obtiene otro índice ordinalmente equivalente que sí la satisface.

(12) CORRADO GINI (1884-1965) gozaba de la confianza del poder político y en 1926 fue nombrado director del Instituto de Estadística italiano. Tuvo una intensa actividad pública y académica. Funda las revistas *Metron*, en 1920, y *Genus*, en 1934. En la popularidad de su índice inciden varias circunstancias. Fue un miembro muy relevante de la escuela italiana de estadística. El mismo GINI establece la estrecha relación de su índice con la curva de Lorenz y, muy importante, domina la lengua inglesa, lo que le permite publicar y dar conferencias en ese idioma. GIORGI (2001) y GIORGI y NADARAJAH (2010) analizan la literatura sobre el índice de GINI. En GIORGI y GUBBIOTTI (2016) se ocupan de aspectos personales.

(13) El grado de aversión a la desigualdad de una función de utilidad, $u(\cdot)$, se evalúa mediante la elasticidad de la utilidad marginal respecto de la renta $q_u(x) = E_{u'(x),x} = -\frac{xu''(x)}{u'(x)}$. Al imponer $q_u(x) = \alpha > 0$, para todo $x > 0$, se obtiene la familia de funciones de utilidad $u_\alpha(x) = \frac{x^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}$, $\alpha \neq 1$, $u_1(x) = \ln(x)$.

(14) Este resultado se demuestra en LAMBERT (1996, teorema 4.2.)

(15) Para una exposición detallada de los contenidos de esta sección véase LAMBERT (1996, cap. 5), GOERLICH y VILLAR (2009, caps. 4, 5, 8 y 9).

(16) Para un cálculo más detallado y un análisis de la relación entre las propiedades de la distribución de preferencias, las de la correspondiente FBS y las de la medida de desigualdad asociada, véase IMEDIO y BÁRCENA (2007), IMEDIO-OLMEDO, BÁRCENA-MARTÍN y PARRADO-GALLARDO (2010).

(17) En BÁRCENA e IMEDIO (1999) se analizan los aspectos metodológicos para el análisis de la progresividad y el efecto redistributivo de las transferencias.

(18) Ello equivale a considerar que las unidades impositivas son homogéneas en relación al resto de características y circunstancias que, además de la renta, inciden en la carga fiscal, o bien que nos referimos a una subpoblación homogénea respecto de esas otras características.

(19) Para un estudio más detallado del efecto de la imposición sobre el bienestar véase IMEDIO (1995).

BIBLIOGRAFÍA

ATKINSON, A. B. (1970), «On the Measurement of Inequality», *Journal of Economic Theory*, 2: 224-263.

— (1975), *The economics of inequality*, Oxford University Press, Londres. [Traducción castellana: *La economía de la desigualdad*, Editorial Crítica, Barcelona, 1981].

ATKINSON, A. B., y F. BOURGUIGNON (1982), «The comparison of multidimensional distributions of economic status», *Review of Economic Studies,* 49: 183-201.

— (2000), «Introduction: Income distribution and economics», en Atkinson, A. B. y F. Bourguignon, (eds.): *Handbook of Income Distribution,* Elsevier Science Publishers B. V. North Holland, Amsterdam, vol. 1, capítulo 1.

BÁRCENA MARTÍN, E. (2011), «Sobre la medición de la desigualdad. El efecto redistributivo del impuesto lineal», *e-pública,* 8: 1-39.

BÁRCENA, E., y L. J. IMEDIO (1999), «Progresividad y efecto redistributivo de las transferencias públicas en Andalucía», *Revista de Estudios Regionales*, 53: 15-40.

BLACKORBY, C., y D. DONALDSON (1978), «Measures of relative equality and their meaning in terms of social welfare», *Journal of Economic Theory*, 18: 59-80.

— (1984), «Ethical social index numbers and the measurement of effective tax/benefit progressivity», *Canadian Journal of Economics*, 17: 683-694.

BOSSERT, W., y A. PFINGSTEN (1990), «Intermediate inequality: concepts, indices, and Welfare implications», *Mathematical Social Sciences,* 19: 117-134.

COWELL, F. A. (1995), *Measuring Inequality*. 2.ª ed. LSE Handbooks in Economics Series, Harvester Wheatsheaf, Hemel Hempstead.

DAGUM, C. (1993), «Fundamentos de bienestar social de las medidas de desigualdad en la distribución de la renta», *Cuadernos de Ciencias Económicas y Empresariales*, 24: 11-36.

DALTON, H. (1920), «The measurement of inequality of income», *The Economic Journal*, 30: 348-361.

DEATON, A., y S. ZAIDI (2002), «Guidelines for constructing consumption aggregates for welfare analysis», *LSMS Documento de Trabajo,* 135, Banco Mundial, Washington D.C.

DEL RÍO, C., y J. RUIZ-CASTILLO (2000), «Intermediate inequality and welfare», *Social Choice and Welfare,* 17: 223-239.

Instituto Nacional de Estadística (INE), *Encuesta de Condiciones de Vida*. Ficheros transversales 2016 y 2008.

ESTEBAN, J. M. (1976), «Social welfare functions and inequality measures», *Documento de Trabajo, 12-76,* Universidad Autónoma de Barcelona, Barcelona.

FELLMAN, J. (1976), «The Effect Transformations on Lorenz Curves», *Econometrica,* 44: 823-824.

FOSTER, J. E. (1985), «Inequality measurement», Publicado en Fair Allocation (Young, H. P., ed.), *Proceedings of symposia in Applied Mathematics,* vol. 33, American Mathematical Society, Providence: 31-68.

GASTWIRTH, J. L. (1971), «A general definition of the Lorenz curve», *Econometrica*, 39: 1037-1039.

GINI, C. (1912), «Variabilità e mutabilità, contributo allo studio delle distribuzioni e relazioni statistiche», *Studi Economico-Giuridici dell' Universiti di Cagliari 3*, part 2: 1-158.

GIORGI, G. M. (2001), «Corrado Gini (1884-1965)», en HYDE, C. y E. SENETA (eds.): *Statisticians of the Centuries*, Springer, New York, pp. 364-368.

GIORGI, G. M., y NADARAJAH, S. (2010), «Bonferroni and Gini indices for various parametric families of distributions», *Metron - International Journal of Statistics,* 68: 23-46.

GIORGI, G. M., y S. GUBBIOTTI (en prensa), «Celebrating the memory of Corrado Gini: a personality out of the ordinary». *International Statistical Review.*

GOERLICH, F., y A. VILLAR (2009), *Desigualdad y Bienestar Social. De la Teoría a la Práctica*, Fundación BBVA, Madrid.

IMEDIO, L. J. (1995), «Algunas consideraciones sobre imposición y bienestar social», *Hacienda Pública Española,* 135: 83-95.

IMEDIO, L. J., y E. BÁRCENA (2007), «Dos familias numerables de índices de desigualdad», *Investigaciones económicas,* 31: 191-217.

IMEDIO-OLMEDO, L. J.; BÁRCENA-MARTÍN, E., y E. M. PARRADO-GALLARDO (2010), «A class Of. Bonferroni inequality indices», *Journal of Publica Economic Theory,* 13: 97-124.

Instituto Nacional de Estadística (INE), *Encuesta de Condiciones de Vida*. Ficheros transversales 2016 y 2008.

JAKOBSSON, U. (1976), «On the Measurement of the Degree of Progression», *Journal of Public Economics,* 5: 161-168.

JENKINS, S. P. (1997), «Trends in real income in Britain: A microeconomic analysis». *Empirical Economics,* 22: 483-500.

KAKWANI, N. C. (1977), «Measurement of Tax Progressivity: An International Comparison», *Economic Journal,* 87: 71-80.

— (1980), «On a Class of Poverty Measures», *Econometrica,* 48: 437-446.

— (1984), «Welfare ranking of income distributions», *Advances in Econometrics,* 3: 191-213.

KIEFER, D. W. (1985), «Distributional tax progressivity indexes», *National Tax Journal,* 37: 497-513.

KOLM, S. C. (1969), «The optimal production of social justice», en Margolis, J. y H. Guitton (eds): *Public Economics,* Macmillan, Londres, pp. 145-200.

— (1976a), «Unequal Inequalities I», *Journal of Economic Theory,* 12: 416-442.

— (1976b), «Unequal Inequalities II», *Journal of Economic Theory*, 13: 82-111.

LAMBERT, P. (1996), *La Distribución y Redistribución de la Renta. Estudios de Hacienda Pública,* Instituto de Estudios Fiscales. (Versión original en inglés *The Distribution and Redistribution of Income. A Mathematical Analysis, 1993,* 2.ª ed., Manchester University Press).

LORENZ, M. O. (1905), «Methods of measuring the concentration of wealth», *American Statistical Association,* 9: 209-219.

MAASOUMI, E. (1986), «The measurement and decomposition of multidimensional inequality», *Econometrica,* 54: 991-997.

MEHRAN, F. (1976), «Linear measures of income inequality», *Econometrica,* 44: 805-809.

MULIERE, P., y M. SCARSINI (1989), «A note on stochastic dominance and inequality measures», *Journal of Economic Theory,* 49: 314-323.

PARETO, V. (1895), «La Legge della Domanda», *Giornale Degli Economisti,* 10: 59-68.

PFINGSTEN, A., y C. SEIDL (1997), «Ray invariant inequality measures», en ZANDVAKILI, S. y D. SLOTJE (eds.): *Research on taxation and inequality,* JAI Press: 107-129.

PRATT, J. W. (1964), «Risk aversion in the small and large», *Econometrica,* 32: 122-136.

SCHUTZ, R. R. (1951), «On the measurement of income inequality», *American Economic Review,* 41: 107-122.

SEN, A. (1973), *On Economic Inequality*, Oxford University Press, Londres.

SEN, A. K., y J. E. FOSTER (1997), *On Economic Inequality,* 2.ª ed., Oxford, Clarendon Press. [Edición en castellano del Fondo de Cultura Económica, México, 2001].

SHORROCKS, A. F. (1980), «The class of additively descomposable inequality measures», *Econometrica,* 48: 613-625.

— (1983), «Ranking income distributions», *Economica,* 50: 3-17.

— (1984), «Inequality decomposition by population subgroups», *Econometrica,* 52: 1369-1386.

— (1988), «Aggregation issues in inequality measurement», en W. Eichhorn (ed.): *Measurement in Economics*, Physica-Verlag, Heidelberg.

Slesnick, D. T. (1991), «The standard of living in the United States», *The Review of Income and Wealth,* 37: 363-386.

Theil, H. (1967), *Economics and information theory,* North-Holland, Amsterdam.

Thistle, P (1989), «Ranking distributions with Generalized Lorenz curves», *Southern Economic Journal,* 56: 1-12

Yaari, M. E. (1987), «The dual theory of choice under risk», *Econometrica,* 55: 90-115.

— (1988), «A controversial proposal concerning inequality measurement», *Journal of Economic Theory*, 44: 381-397.

Yitzhaki, S. (1983), «On an extension of the Gini inequality index», *International Economic Review,* 24: 617-628.

— (1998), «More than a dozen alternative ways of spelling Gini», *Research on Economic Inequality,* 8: 13-30.