LA IMPORTANCIA DE LOS EFECTOS ESPACIALES EN LA PREDICCIÓN DEL PRECIO DE LA VIVIENDA. UNA APLICACIÓN GEOESTADÍSTICA EN ESPAÑA

José-María MONTERO LORENZO
Gema FERNÁNDEZ-AVILÉS
Universidad de Castilla-La Mancha

Resumen

El precio de la vivienda es uno de los problemas que más preocupan a los agentes económicos participantes en el mercado inmobiliario español. Las estadísticas sobre precios de la vivienda en España no consideran los efectos espaciales (o mejor, espacio-temporales) inherentes a los precios de los bienes inmuebles. En este artículo se propone un enfoque geoestadístico de la predicción de precios de la vivienda. Dicho enfoque se ilustra mediante a) la elaboración de un geoíndice espacio-temporal de precios de vivienda en Toledo; y b) la creación de mapas de predicción de precios de la vivienda en Madrid mediante varias alternativas geoestadísticas meramente espaciales.

Palabras clave: precio de la vivienda, mercado inmobiliario, predicción, geoestadística, geoíndice.

Abstract

Housing price is one of the top concerns of participants in the Spanish real estate market. Housing price statistics in Spain do not take into account the spatial (or spatio-temporal) effects inherent to property prices. This article proposes a geostatistical approach to housing price prediction. Such an approach is illustrated by a) elaborating a spatio-temporal housing price geoindex in the city of Toledo; and b) creating housing prices prediction maps in the city of Madrid using a number of merely spatial geostatistics alternatives.

Key words: housing price, real estate market, prediction, geostatistics, geoindex.

JEL classification: C21, C23, C31, C53, R31.

I. INTRODUCCIÓN

1. El precio de la vivienda y su relevancia socioeconómica

DESDE el momento en que desde la perspectiva de la teoría económica la vivienda es considerada como un bien de primera necesidad –sin duda el bien de primera necesidad más caro de nuestra sociedad, pues constituye la principal decisión de inversión de una familia a lo largo de su vida– los precios de la vivienda adquieren una notoriedad que no alcanza, ni de lejos, ningún otro bien. Pero es que, además, el derecho a la vivienda es una pieza clave de los procesos de bienestar y, más específicamente, de cohesión social tan perseguidos por las sociedades modernas avanzadas.

Las anteriores características, que hacen tan especial un bien como la vivienda, han sido reconocidas a escala mundial en la Declaración Universal de los Derechos Humanos de 1948, a nivel europeo en la Carta Social Europea de 1961 (abierta a la firma en Turín el 18 de octubre de 1961) y en la revisión de la misma llevada a cabo en Estrasburgo en 1996, y en nuestro país en el art. 47 del Título 1 de la Constitución de 1978: «Todos los españoles tienen derecho a disfrutar de una vivienda digna y adecuada…».

Pero, además de lo anterior, desde el punto de vista macroeconómico, la importancia del sector de la construcción (y en particular del subsector de la vivienda) en la actividad económica en nuestro país es absolutamente clave, y no solo por su aportación al producto interior bruto (PIB), sino también por su carácter de sector impulsor de los demás sectores y por su especial incidencia en el empleo. Es cierto que tras cada corrección del mercado inmobiliario se propone un modelo de crecimiento de la economía española que no esté basado en el ladrillo, pero también es cierto que una y otra vez el ladri-llo, tan intensivo en mano de obra, directa e indirectamente, es quien se convierte en protagonista de los auges económicos de nuestro país. En su momento más bajo de los últimos años (en 2013), la construcción representaba el 7,8 por 100 del PIB español, porcentaje similar al de los primeros años de la década de los 2000, si bien inferior al casi 12 por 100 que llegó a alcanzar cuando la actividad inmobiliaria estaba en su punto álgido. Pero todo apunta, una vez más, a que la construcción ha

vuelto a aparecer en escena después de siete años de duro ajuste (Banco de España, 2015) y, como señalan Carbó y Rodríguez (2015), su papel en el crecimiento económico español será de nuevo, tarde o temprano, significativo. También desde la perspectiva macroeconómica, no se ha de olvidar, como ponen de manifiesto Martínez-Pagés y Maza (2003), que la vivienda es un componente fundamental de la riqueza de las familias y, por tanto, uno de los factores que contribuyen a explicar sus decisiones de gasto, por lo que su precio ocupa un lugar destacado entre los indicadores relevantes de estabilidad macroeconómica o financiera de un país. Dicho precio incluso pudiera condicionar las decisiones migratorias de los trabajadores, incidiendo así en los mercados laborales (García-Montalvo, 2001).

Por tanto, no es extraño que el precio de la vivienda siga siendo en la actualidad, a pesar de la corrección que ha experimentado tras el estallido de la burbuja inmobiliaria, uno de los problemas que más preocupan a la ciudadanía y a las autoridades económicas de nuestro país, si bien el precio de otros bienes inmuebles como los locales comerciales, oficinas, etc. también es de sumo interés para determinados estratos de la población.

2. Estadísticas de precios de la vivienda en España

A pesar de que el precio de la vivienda es una de las cuestiones que más preocupan a la ciudadanía española, las estadísticas sobre precios de la vivienda en España no han calado en la sociedad como hubiera sido deseable, quizá, entre otros motivos, porque requieran algunas mejoras entre las que se incluyen la consideración de los efectos espaciales (o mejor, espacio-temporales) inherentes a los precios de los bienes inmuebles. El Ministerio de Fomento elabora trimestralmente el precio medio de la vivienda tasada; el Instituto Nacional de Estadística (INE) elabora el índice de precios de vivienda (IPV); el Colegio de Registradores de la Propiedad, Bienes Muebles y Mercantiles de España, en su Estadística Registral Inmobiliaria, publica anualmente, y a escala nacional, el Índice de Precios de la Vivienda de Ventas Repetidas (IPVVR); el Consejo General del Notariado elabora, a nivel de comunidad autónoma, series mensuales del precio de la vivienda libre, de protección oficial y de la relación entre ambos; y algunas sociedades tasadoras, agencias inmobiliarias y portales inmobiliarios presentan con regularidad precios medios basados en sus propios registros.

El precio medio de la vivienda tasada elaborado por el Ministerio de Fomento es, simplemente, el precio medio de alrededor de 300.000 tasaciones, que son las que vienen realizándose cada año. Por consiguiente, no promedia precios de mercado, sino precios estimados por los tasadores. La máxima desagregación geográfica con la que se publican dichos precios corresponde a los municipios con más de 25.000 habitantes. El precio del metro cuadrado de la vivienda (sea libre o de protección oficial) ofrecido por el Consejo General del Notariado se construye también como una simple media aritmética de los precios individuales en las operaciones recogidas por los notarios. Las sociedades tasadoras, las agencias inmobiliarias y los portales inmobiliarios también utilizan como estimador una simple media aritmética, que, como se comentará más adelante, no es precisamente un estimador deseable en presencia de dependencia espacial.

El IPV elaborado por el INE (del tipo Laspeyres encadenado) se alimenta de los valores y superficies declarados en las escrituras formalizadas ante notario; por consiguiente, supuestamente recoge el precio de mercado del metro cuadrado de vivienda. Y decimos «supuestamente» porque la componente de mercado negro en el sector inmobiliario no puede calificarse precisamente de desdeñable, y no es constante en el tiempo. Sin embargo, el índice no se elabora directamente a partir de las medias de dichos precios relativos en dos instantes de tiempo, sino que es el resultado de una regresión hedónica de los precios observados sobre un conjunto de testigos de las viviendas; con ello se persigue la eliminación de los cambios en los precios derivados de variaciones en las características de las viviendas muestreadas. Desafortunadamente, el índice publicado por el INE es agregado, perdiendo prácticamente toda su utilidad. Además, como su propia metodología indica, se trata de un indicador concebido únicamente para establecer comparaciones en el tiempo. No entra dentro del ámbito del mismo la medición de los niveles de precios. Por tanto, no permite establecer comparaciones espaciales de dichos niveles.

El IPVVR elaborado por el Colegio de Registradores se construye a partir de los registros de aquellas viviendas que han sido vendidas por lo menos dos veces dentro del período de estudio. La ventaja de este método radica en el hecho de que, al utilizar información de las mismas unidades en dos momentos del tiempo, las características físicas del bien (localización, superficie, tipología…) sobre el que se calcula la evolución del precio se mantienen

homogéneas, con lo cual se elimina una de las principales limitaciones de las metodologías basadas en la utilización de precios medios, que no controlan la evolución de la calidad de las viviendas y no proporcionan, por tanto, índices de calidad constante. La principal desventaja es que el mercado de la vivienda no tiene la profundidad deseable para que el número de compra-ventas repetidas sea suficiente cara a la representatividad de las estimaciones de precios (o de su evolución) que proporciona.

Ahora bien, como ya se puso de manifiesto en Montero (2004): a) a un potencial comprador, a un constructor, a un promotor o, en general, a un ciudadano interesado por las cuestiones del mercado de la vivienda, ¿le sirve de algo conocer un precio tan genérico como el que hace referencia a toda una capital de provincia o a toda una comunidad autónoma? ¿O una tasa de variación, como es el caso del IPV elaborado por el INE? ¿Es útil para las autoridades con responsabilidad fiscal en materia inmobiliaria? ¿Ayuda en el éxito potencial de la política de vivienda? La respuesta a todas estas cuestiones es negativa. Quizá por ello su escasa popularidad entre la ciudadanía; b) en caso de considerar de utilidad una información tan genérica, ¿se puede aceptar como realista? En otros términos, ¿la metodología utilizada para llevar a cabo tal estimación es estadísticamente correcta? La respuesta vuelve a ser negativa.

3. El factor espacial (o espacio-temporal) y el precio de la vivienda

Precisamente en lo que a la última cuestión planteada en el epígrafe anterior se refiere, es necesario poner de manifiesto que ninguno de los indicadores de precios de la vivienda que se elaboran en nuestro país tiene en cuenta la Primera Ley de la Geografía (o Principio de Autocorrelación Espacial) formulada por Tobler (1970): «Todas las cosas están relacionadas entre sí, pero las cosas más próximas están más relacionadas que las que están más distantes». Tampoco tienen en cuenta las consecuencias predictivas de la extensión espacio-temporal de dicho principio de autocorrelación, que se ha popularizado enormemente en los últimos años al albur de los desarrollos teóricos e informáticos y del incremento en la potencia computacional. La existencia, e importancia, de la autocorrelación espacial de los precios de la vivienda, y de su estructura, está perfectamente comprobada en la literatura económica sobre la cuestión, desde los trabajos iniciales de Granelle (1970) y Gigou (1982) hasta los más recientes, alguno de los cuales incorpora cuestiones de autocorrelación espacio-temporal, de Osland (2010), Montero, Larraz y Páez (2009), Montero y Larraz (2011, 2012), Banzhaf y Farooque (2012), Kuntza y Helbichab (2014), Widłak, Waszczuk y Olszewski (2015) y Pijnenburg (2015), entre otros. Es más, las propias características de la vivienda muestran una significativa correlación espacial (espacio-temporal), aspecto que tampoco se puede obviar (véanse a estos efectos los trabajos de Basile, *et al.,* 2014, y Montero, Fernández-Avilés y Mínguez, 2015). Y, como señalan Banzhaf y Farooque (2012), entender la variabilidad espacial de los precios de la vivienda juega un papel crucial en importantes cuestiones como el coste de la vida, los índices de calidad de vida, estudios sobre bienes públicos y la movilidad geográfica de las familias, entre otras.

Por consiguiente, ni los precios de la vivienda que alimentan los indicadores del Ministerio de la Vivienda, del INE, del Colegio de Registradores de la Propiedad, Bienes Muebles y Mercantiles de España, de las sociedades tasadoras y de los portales inmobiliarios, son espacial o espacio-temporalmente independientes, ni lo son las características de dichas viviendas que intervienen en la corrección hedónica o en el modelo hedónico en sí mismo.

Las consecuencias de no tener en cuenta dichas dependencias espaciales o espacio-temporales, así como de determinar erróneamente la estructura semivariográfica, de vecindad, o de cualquier otro tipo, que gobierna tales dependencias, son ciertamente perversas. De acuerdo con Montero, Fernández-Avilés y Mateu (2015), los precios medios elaborados por el Ministerio de Fomento, el Colegio de Registradores, las sociedades tasadoras y los portales inmobiliarios, son un estimador insesgado y consistente del precio medio poblacional, pero su varianza está ciertamente infraestimada (en el supuesto realista de que la autocorrelación es de carácter positivo) y, por tanto, la media muestral ya no es el estimador de mínima varianza. Además, en presencia de correlación positiva en los precios de la vivienda, la cuasivarianza de los precios muestrales es un estimador sesgado de la varianza poblacional de dichos precios, lo cual exacerba la infraestimación anteriormente aludida. Como consecuencia de esta infraestimación, en el marco de la estimación, los intervalos de confianza realmente son de una confianza menor que la que se les supone (o tienen una amplitud superior a la que se obtiene cuando se consideran independientes los precios de los bienes inmuebles). En el marco del contraste, la región

crítica es más corta, y la potencia de los contrastes es menor, que la que se obtiene bajo el supuesto de independencia. Por consiguiente, obviar la dependencia espacial positiva inherente en los precios de la vivienda lleva a rechazos indeseados de la hipótesis nula. En caso de utilizar un promedio de precios como indicador del promedio de un área, debería utilizarse la denominada media *krigeada* propuesta por la geoestadística (véase Wackernagel, 2003, o, más recientemente, Montero, Fernández-Avilés y Mateu, 2015).

La no consideración de la correlación espacial positiva de los precios de la vivienda y/o de las principales características del inmueble también provoca perversas consecuencias en las predicciones obtenidas de las regresiones hedónicas. En primer lugar, dependiendo de la naturaleza de dicha autocorrelación espacial, las estimaciones del modelo podrán ser sesgadas, inconsistentes o ineficientes. En segundo lugar, y sobre todo, estima incorrectamente (normalmente infraestima) los impactos de los cambios en los regresores sobre el precio de la vivienda, pues solo tiene en cuenta los efectos directos, y no los *spillovers* que surgen como consecuencia del proceso de autocorrelación. Por tanto, las regresiones hedónicas del precio de la vivienda deberían ser espaciales (y mejor espacio-temporales) con autocorrelación en la variable respuesta (modelos espaciales autorregresivos o *SAR models* en la terminología de Anselin, 1988) o tanto en la variable respuesta como en alguna de las covariables (modelos de Durbin espaciales). Adicionalmente, cabe formularse las siguientes preguntas: además de autocorrelación espacial, ¿en los procesos de precios de vivienda existe heterogeneidad espacial? Y si es así, ¿cómo debe incluirse en un modelo hedónico espacial? Además, ¿las relaciones de las variables explicativas con el precio de la vivienda son lineales? Si no lo son, y a juzgar por la literatura sobre la cuestión parece que así es (véanse los recientes trabajos de Basile, Durbán, Mínguez, Montero y Mur, 2014, y Montero, Fernández-Avilés y Mínguez, 2015), las regresiones hedónicas de precios de vivienda no deberían incluir covariables sino funciones de ellas; es decir, deberían tener carácter no paramétrico.

Precisamente, la heterogeneidad espacial parece constituir otro de los hechos estilizados de los precios de los bienes inmuebles en general, y de la vivienda en particular, que al abordarse desde un punto de vista continuo (parece lo lógico en el caso de los precios de los bienes inmuebles) ha dado lugar a diversas formas de modelización local y, en particular, a la regresión geográficamente ponderada (RGP). Evidentemente, la no consideración de la heterogeneidad espacial también tiene perversas consecuencias en la estimación de los precios de la vivienda (sesgadez de los parámetros estimados, predicciones subóptimas, niveles de significación erróneos, etc.).

4. Geoestadística y precios de vivienda

Hechas las consideraciones teóricas anteriores, además, a efectos prácticos, resultaría de mucha mayor utilidad poder predecir el precio de la vivienda en cualquier lugar de una ciudad o de una zona de ésta, para unas características dadas del inmueble. Es lo que a un ciudadano, potencial comprador o vendedor de una vivienda, a una agencia o portal inmobiliario le interesa. Es más, sería de especial interés que dichas predicciones estuviesen automatizadas de tal manera que una vez incluidas la localización y principales características de la vivienda, dicho sistema proporcionase la predicción del precio de la misma. No sería la primera vez que se configurase dicho sistema, pues Gámez, Montero y García (2000) ya lo diseñaron y pusieron en práctica para predecir precios de vivienda en la ciudad de Albacete.

En el caso de bienes inmuebles como locales comerciales, oficinas, etc., de indudable relevancia en la actividad económica, la situación es aún peor: no existen estadísticas oficiales y raramente se puede disponer de información extraoficial. Además, cuando se puede acceder a ella, su tamaño es muy escaso. Sin embargo, ello no resulta un impedimento insalvable para llevar a cabo predicciones de precios puntuales o medios de locales comerciales, oficinas, etc., ya que se puede aprovechar la correlación existente entre los precios de los bienes inmuebles de distinta naturaleza para «ampliar» el tamaño de muestra. Así, por ejemplo, se pueden utilizar precios de vivienda (sobre los que se dispone de bastante información) para mejorar las predicciones de, digamos, precios de locales comerciales, aprovechando las dependencias espaciales cruzadas entre los precios de éstos y los de la vivienda (o cualquier otro tipo de inmueble del que se tenga suficiente información y cuyos precios estén estrechamente correlacionados con los de los locales comerciales).

En definitiva, resulta evidente que los precios de los bienes inmuebles son un claro caso de autocorrelación espacial, por lo que su predicción no puede quedar ajena a la utilización de los nuevos

procedimientos cuantitativos que incorporan el espacio (y el espacio-tiempo) en los procesos de estimación y predicción.

El aprovechamiento de las dependencias espaciales o espacio-temporales inherentes en los precios de la vivienda a la hora de la predicción de los mismos, en un lugar puntual o un área geográfica concreta (normalmente un municipio), se puede llevar a cabo desde tres grandes paradigmas: el de la econometría espacial, el de los modelos de regresión locales (o geográfico) y el de la geoestadística. A la descripción, necesariamente breve, de los modelos aportados por dichos paradigmas se dedica por entero la siguiente sección, si bien este artículo se centra en la perspectiva geoestadística, quizás menos conocida que las otras dos, y desde la cual han surgido en los últimos años interesantes desarrollos espacio-temporales. La geoestadística utiliza únicamente información sobre la variable de interés (en el caso que nos ocupa, precio por metro cuadrado de la vivienda) y no echa mano (al menos explícitamente) de «covariables explicativas» (en nuestro caso, las principales características de la vivienda), a veces difíciles de obtener o con muchos errores de medida (1). No obstante, centrándonos en el caso que nos ocupa, algunos procedimientos de la geoestadística permiten el cálculo de la deriva del precio de la vivienda sobre un área, bien sea sobre la base de las coordenadas espaciales o de las características de la vivienda, o de ambas, mediante un procedimiento de regresión, y, posteriormente, del residuo espacialmente correlacionado, con lo cual, de alguna manera, la geoestadística presenta puntos comunes con los otros dos paradigmas. Otra ventaja que presenta el enfoque geoestadístico es que permite obtener, de forma sencilla, tanto la predicción puntual (en una localización no observada) como por bloques (el promedio de un área no observada, digamos un barrio, distrito, incluso una ciudad). Finalmente, señalar que, como se avanzó anteriormente, la geoestadística sería de gran utilidad para la elaboración de índices de precios de inmuebles distintos de la vivienda mediante las técnicas de *cokrigeado,* al sacar un enorme provecho de las dependencias espaciales cruzadas entre los precios de la vivienda y los de otros bienes inmuebles menos observados (caso de las oficinas, locales comerciales, etc.) en un contexto de heterotopía parcial.

Dicho lo anterior, esta contribución se articula como sigue. En la segunda sección se comentan brevemente los fundamentos y principales especificaciones de los paradigmas: i) de la econometría espacial; ii) de la modelización local; y iii) de la geoestadística, para la predicción de los precios de la vivienda. Se hará especial hincapié en la exposición de los rudimentos básicos del *krigeado,* herramienta de la geoestadística que proponemos para la estimación de precios de bienes inmuebles. En la tercera sección se llevan a cabo dos aplicaciones prácticas. En primer lugar, se elaboran los índices geoestadísticos espacio-temporales (también denominados *índices krigeados* o, mejor, *geoíndices*) del precio de la vivienda en Toledo en el período 1995-1999. En segundo lugar, se utilizan los procedimientos geoestadísticos meramente espaciales para construir el mapa de precios de vivienda de la ciudad de Madrid en el primer trimestre de 2010. Lamentablemente, en este último caso, la predicción tiene que ser únicamente espacial por no estar a disposición de los autores información de carácter espacio-temporal. De hecho, la base de datos que se utiliza en este artículo tuvo que ser creada ex profeso por los propios autores. En la última sección, se exponen las principales conclusiones que se derivan de este trabajo y algunas líneas de investigación futuras que los autores consideran de interés.

II. PRINCIPALES ALTERNATIVAS METODOLÓGICAS ESPACIALES PARA LA PREDICCIÓN DE PRECIOS DE VIVIENDA

1. El paradigma de la econometría espacial

Los primeros modelos lineales espaciales aportados por el paradigma econométrico (la mayoría de ellos popularizados en el texto pionero de Anselin, 1988) son modelos espaciales autorregresivos globales (en contraposición a la consideración de efectos locales). Dichos modelos incluyen autocorrelación espacial: i) en la variable respuesta (2) (modelo lineal espacial, SLM) (3); ii) en el término de error (modelo SEM); iii) o en ambos (modelo espacial general, GSM); iv) o en la variable respuesta y en las covariables explicativas (modelo espacial de Durbin, SDM); y v) o en las variables explicativas y en el término de error (modelo espacial de Durbin con autocorrelación en el error, SDEM) (4).

Los modelos anteriores han sido recientemente ampliados mediante la inclusión de una deriva espacial calculada mediante *splines* penalizados, dando lugar a la familia de modelos econométricos espaciales con PSSD, acrónimo de *penalized splines spatial drift* (véase Montero, Mínguez y Durbán, 2012). Tales extensiones se obtienen sin más que incluir en ellos un término de deriva espacial, $f(s_1,s_2)$, donde

s_1 y s_2 representan la longitud y latitud geográfica del lugar donde está enclavada la vivienda. De esta forma, estos nuevos modelos no solo capturan la autocorrelación espacial existente en los precios de vivienda, sino también la heterogeneidad espacial. Los detalles sobre la estimación de este tipo de modelos pueden verse en Montero, Mínguez y Durbán (2012) y en Montero, Fernández-Avilés y Mínguez (2015).

En la actualidad, para contemplar la posibilidad de que las relaciones entre la variable respuesta y las covariables exógenas sean de carácter no lineal (al menos algunas de ellas), en los modelos econométricos espaciales con PSSD se está trabajando en la sustitución de las covariables (o algunas de ellas) por datos funcionales o funciones suaves de las mismas (términos GAM), dando lugar a la familia de modelos econométricos espaciales-PSSD-GAM, que capturan no solo la autocorrelación y heterogeneidad espacial, sino también la no linealidad. En el caso de los precios de vivienda, la anteriormente mencionada posibilidad constituye una sospecha fundada. Por el momento, se han obtenido resultados en el caso del PSSD-GAM-SLM y del PSSD-GAM-SDEM (véase Montero, Fernández-Avilés y Mínguez, 2015) (5).

2. El paradigma de los modelos locales

La literatura sobre modelos locales de precios de vivienda, paramétricos y no paramétricos, que capturan la heterogeneidad espacial, también es ciertamente abundante. Y es que la heterogeneidad espacial también parece ser un hecho estilizado de los precios de los bienes inmuebles (véase, por ejemplo, Helbich, *et al.,* 2013a, b). Como señalan Helbich, *et al.* (2013b), dependiendo de si las unidades espaciales están o no predefinidas, la heterogeneidad espacial puede abordarse desde el punto de vista discreto (modelos de efectos fijos y aleatorios, modelos multinivel) o continuo (regresión polinomial, filtro espacial adaptativo, modelo de coeficientes aleatorios, modelo de expansión espacial y modelos locales, generalmente ponderados). En el caso de los precios de los bienes inmuebles, la heterogeneidad espacial se ha abordado masivamente desde la perspectiva continua, y el instrumento generalmente utilizado ha sido la modelización local ponderada y, en particular, la RGP. Algunos ejemplos son Pavlov (2000), Yu (2006) y Manganelli, *et al.* (2014).

Siguiendo a Fotheringham, Brunsdon y Charlton (2002), para llevar a cabo una RGP se construye una malla de puntos de regresión sobre el área objeto de estudio, se define un conjunto de regiones (una por punto de regresión) y se lleva a cabo la correspondiente regresión en cada uno de los puntos de la malla sobre la base de los datos de la región que lo comprende. El resultado es un conjunto de estimaciones paramétricas, una por punto de regresión. A diferencia de la conocida como *moving window regression* (MWR), y para mejor representación de los procesos espaciales continuos, en la RGP cada dato observado se pondera en el proceso de regresión inversamente a su distancia al punto de regresión, utilizándose normalmente como función de ponderación un kernel espacial gaussiano. En términos formales, la RGP no es más que una extensión del modelo de regresión tradicional que permite la estimación de parámetros a escala local (proporciona mapas de valores paramétricos) en vez de a nivel global. Los detalles sobre la estimación de estos modelos, propiedades de los estimadores, errores estándar locales, elección de la función de ponderación espacial, etc., pueden verse en Fotheringham, Brunsdon y Charlton (2002).

Como era de esperar, en el campo de la modelización local ha habido incursiones exitosas en la incorporación no solo del espacio, sino también del tiempo, y la interacción entre ambos. Un ejemplo en el ámbito de los precios de vivienda es Huang, Wub y Barry (2010).

3. El paradigma geoestadístico

Sean $X(\boldsymbol{s}_1)$, $X(\boldsymbol{s}_2)$, ..., $X(\boldsymbol{s}_n)$ los precios de n viviendas ubicadas en las localizaciones $\boldsymbol{s}_1$, $\boldsymbol{s}_2$, ..., $\boldsymbol{s}_n$ de una determinada área geográfica. La filosofía del paradigma geoestadístico a la hora de estimar el precio de la vivienda en una localización no observada, s_0, o de estimar el precio medio de la vivienda en un área geográfica de interés (municipio, provincia, región, país), tiene la misma lógica que la que utilizan los agentes económicos. Cuando un potencial comprador o vendedor de una vivienda, o un tasador, pretende evaluar el precio de una vivienda ubicada en una determinada localización, el procedimiento que utiliza es la observación de los precios de las viviendas similares en el entorno de dicha localización. En realidad, el procedimiento mental (o calculístico) que utiliza es el de promediar los precios de dichas viviendas. Y como este procedimiento tiene una lógica aplastante, no debe ser modificado. Lo único que se puede cuestionar es si, en el proceso de promediación, las ponderaciones

de los precios de las viviendas vecinas tienen que ser iguales o, por el contrario, unas deben tener mayor ponderación que otras. Lo que los agentes económicos suelen hacer es utilizar ponderaciones iguales, pero ya vimos en el epígrafe precedente los peligros que esta decisión conlleva. Superada esta cuestión (las ponderaciones no tienen por qué ser iguales), el estimador del precio de la vivienda (en un punto o en un área) propuesto desde la disciplina geoestadística es $\hat{X}(\boldsymbol{s}_0)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i X(\boldsymbol{s}_i)$.

Las ponderaciones, λ_i, se obtienen de tal manera que el estimador resultante sea óptimo, en el sentido de insesgadez y mínima varianza del error de estimación. Y ello en un contexto en el que se supere la condición de independencia de las variables que representan el precio de la vivienda en cada localización, ya que, como se avanzó anteriormente, la correlación espacial de carácter positivo de los precios de los bienes inmuebles está suficientemente contrastada.

En el caso habitual en el que el proceso estocástico que gobierna los precios de la vivienda no sea estacionario, el vector de ponderaciones correspondiente al punto no observado $\boldsymbol{s}_0$, resultante de la minimización de la varianza de estimación sujeta a las condiciones de insesgadez, viene dado por el denominado sistema de ecuaciones sistema de *krigeado* universal (6) (KU):

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n(\boldsymbol{s}_0)}\lambda_j\gamma_e(\boldsymbol{s}_1-\boldsymbol{s}_j)+\sum_{h=1}^{p}\alpha_h f_h(\boldsymbol{s}_1)=\gamma_e(\boldsymbol{s}_i-\boldsymbol{s}_0),\ \forall i=1,\ldots,n(\boldsymbol{s}_0) \\ \sum_{i=1}^{n(\boldsymbol{s}_0)}\lambda_j f_h(\boldsymbol{s}_i)=f_h(\boldsymbol{s}_0),\ \forall h=1,\ldots,p \end{cases} \qquad [1]$$

donde $n(\boldsymbol{s}_0)$ indica el número de observaciones vecinas al punto de estimación que entran en el proceso de estimación, $\sum_{h=1}^{p}\alpha_h f_h(\boldsymbol{s}_i)$representa la expresión local de la deriva en el entorno de $\boldsymbol{s}_i$, siendo $\{f_h(\boldsymbol{s}),\ h=1,\ldots,p\}$ funciones conocidas (monomios de las coordenadas) y linealmente independientes, α_h coeficientes constantes, pero obtenidos con vecindad móvil y que pueden diferir de una vecindad a otra, y p el número de términos empleados en la aproximación de la deriva. La distancia entre los puntos observados en la vecindad de $\boldsymbol{s}_0$ viene dada por $\boldsymbol{s}_i$-$\boldsymbol{s}_j$, y aquella entre éstos y el punto observado es $\boldsymbol{s}_i$-$\boldsymbol{s}_0$. γ_e representa el semivariograma de los residuos resultantes de restar el valor de la deriva (que no se estima explícitamente) a los valores observados (precios de vivienda disponibles), y no de los valores observados en sí mismos, lo cual constituye una seria limitación del procedimiento (7).

La varianza de predicción KU viene dada por:

$$V\left[\hat{X}(\boldsymbol{s}_0)-X(\boldsymbol{s}_0)\right]=\sum_{i=1}^{n(\boldsymbol{s}_0)}\lambda_i\gamma_e(\boldsymbol{s}_i-\boldsymbol{s}_0)+\sum_{h=1}^{p}\alpha_h f_h(\boldsymbol{s}_0). \qquad [2]$$

La literatura geoestadística ha aportado varias soluciones al problema del desconocimiento de γ_e, como suponer que $\gamma_X\approx\gamma_e$ en un entorno de estimación pequeño, ya que, en este caso, la deriva no puede cambiar mucho. Sin embargo, en la práctica, se ha optado por alternativas al KU como:

i) El *krigeado* con deriva externa (KDE), que en vez de utilizar monomios de las coordenadas en las ecuaciones de KU, define la deriva externamente a través de algunas variables auxiliares que se suponen conocidas en los mismos puntos en los que se conoce la variable principal (si no fuera así, es decir, si se tuviese una situación heterotópica en lo que a las variables auxiliares se refiere, debería utilizarse *cokrigeado,* la versión multivariante del *krigeado*).

ii) El *krigeado* residual (KR), también conocido como *regression kriging* o *kriging after detrending*, que supone conocida la forma de la deriva (en base a conocimientos preexistentes), la estima en el punto objeto de estimación, obtiene los residuos (supuestamente estacionarios) por diferencias, determina el semivariograma permisible que se supone gobierna el proceso estocástico a partir del semivariograma experimental de dichos residuos, lleva a cabo una estimación *krigeada* ordinaria (supone la media nula) de ellos en el punto de estimación y la suma a la de la deriva, obteniendo así la estimación deseada.

Como apuntan Hengl, Heuvelink y Stein (2003), KU, KR y KDE son matemáticamente equivalentes si los *inputs* que los alimentan son los mismos. Por tanto, la diferencia está en la definición, es decir en tales *inputs,* y en la metodología que usan. El KDE incluye variables externas en el sistema de ecuaciones de *krigeado,* y la dificultad estriba en que no se conoce (ni se puede estimar a partir de componentes observables) el semivariograma de los residuos. Lo mismo pasa en el KU (que incluye funciones paramétricas de coordenadas en dicho sistema). En el KR el problema es que los coeficientes de la deriva no son insesgados en presencia de residuos correlacionados espacialmente. Sin embargo, hay que señalar que el KR tiene la ventaja de acomodar

distintos tipos de regresión (estratificación, modelos aditivos generalizados, árboles de regresión, etc.) y de permitir la interpretación por separado de la deriva y la componente residual, cosa que no ocurre en el KU y el KDE puesto que los coeficientes de ambas se estiman a la vez.

En caso de estimación de precios medios a escala provincial, regional e incluso nacional, dicha media debe ser obtenida por el procedimiento de *krigeado de la media* (KM) (véase Montero, Fernández-Avilés y Mateu, 2015). El estimador de la misma es una media ponderada de todas las observaciones en el área, y las ponderaciones de las mismas, λ_i, se obtienen del sistema de ecuaciones de KM:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j C(\boldsymbol{s}_i - \boldsymbol{s}_j) - \alpha = 0, \ \forall i = 1, \ldots, n \\ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1 \end{cases}, \qquad [3]$$

que viene expresado en términos de la función de covarianza, $C(\boldsymbol{s}_i - \boldsymbol{s}_j)$, que, en el caso estacionario, solo depende de la distancia entre las observaciones. La varianza del error de estimación viene dada por α. La extensión espacio-temporal del sistema de ecuaciones de KM es inmediata, sin más que sustituir los términos covariográficos meramente espaciales por los correspondientes términos espacio-temporales $C(\boldsymbol{s}_i - \boldsymbol{s}_j, t_i - t_j)$.

Antes de finalizar estas disquisiciones geoestadísticas teóricas, queremos dejar bien patente que:

1. El procedimiento de *krigeado* habitual en la investigación sobre precios de vivienda es el *krigeado* ordinario (KO), que requiere la estacionariedad, al menos intrínseca, de los mismos. Pero la utilización de este procedimiento pudiera ser cuestionable, por cuanto dicha estacionariedad parece no verificarse. Además, su aplicación debería llevarse a cabo sobre el mismo tipo de viviendas (lo cual exige la estratificación de la muestra, si es que el tamaño de ésta lo permite), o sobre las denominadas viviendas «equivalentes», es decir, de similares características (véase Montero y Larraz, 2006, en lo que se refiere a la transformación de las viviendas de la muestra en viviendas equivalentes). De esta manera, el correspondiente efecto espacial queda aislado (en este caso la autocorrelación espacial) y puede recogerse mediante el procedimiento de *krigeado* correspondiente. Este modo de actuar se correspondería con el KR si la ecuación de la deriva incorpora, además de las coordenadas, las características individuales y de área de las viviendas (que, a su vez, por lo menos las segundas, recogerían parte de la heterogeneidad espacial existente en el proceso de precios de vivienda). Si no se lleva a cabo la estratificación de la muestra o la equiparación de las viviendas contenidas en la misma, la intensidad y forma de la autocorrelación espacial de los precios de vivienda estaría contaminada por los efectos de las características anteriormente mencionadas.

2. En el KU, la deriva (que capturaría la heterogeneidad espacial) se considera local y es solo función de la localización geográfica de las viviendas. Por consiguiente, la capacidad de este tipo de deriva de sustituir a la estratificación o equiparación de las viviendas de la muestra depende de la intensidad de la relación entre las características de la vivienda y el emplazamiento de las mismas, que suele ser discutible. Por otra parte, la captura de la autocorrelación espacial se lleva a cabo en base a un semivariograma de componentes no observables.

3. Si en la deriva del KDE se incluyen también las características individuales de las viviendas (antigüedad, superficie construida, garaje, etc.), el KDE podría ser un buen candidato para la predicción de sus precios. La deriva externa, al considerarse local, recogería gran parte de la heterogeneidad espacial, sobre todo si entre las covariables figuran las características de área de la vivienda (también podría considerarse la inclusión de la deriva interna vía coordenadas espaciales).

III. APLICACIONES PRÁCTICAS

1. Elaboración de geoíndices espacio-temporales de precios de vivienda. Una aplicación a la ciudad de Toledo

Ante la imposibilidad manifiesta de que un investigador particular disponga de una base de datos espacio-temporal de precios de vivienda, para ilustrar la elaboración de geoíndices espacio-temporales de los mismos (precio medio por metro cuadrado) hemos recurrido a la información relativa al precio de las viviendas tasadas, tanto nuevas como usadas, en Toledo capital, para una referencia temporal de cinco años (veinte trimestres), 1995-1999 (8). Se comparan las estimaciones proporcionadas por la antigua Subdirección General de Información y Estadística del Ministerio de Fomento en la publicación *Índice de precios de las viviendas. Estadística de precio medio del m² (datos obtenidos de las tasaciones hipotecarias)* con las derivadas

del estimador *krigeado* meramente espacial de la media, obtenidas en Montero (2004), y con las que proporciona el *krigeado* espacio-temporal de la media. Para la construcción de geoíndices relativos a precios de otros bienes inmuebles (oficinas, locales comerciales, etc.), que exigen técnicas de *cokrigeado,* véase Montero, Larraz y Páez (2009).

Debido al secreto estadístico, no se dispone de la localización exacta de las viviendas en los códigos postales a los que pertenecen; no obstante, ello no es impedimento para evaluar las consecuencias de obviar las dependencias espaciales o espacio-temporales inherentes a los precios de vivienda, por cuanto el resultado obtenido mediante la metodología ministerial sería exactamente el mismo fuese cual fuese la ubicación de los inmuebles. En consecuencia, la información disponible se dispuso de tal forma que cubriese la superficie de los códigos postales correspondientes, de manera que los resultados fuesen comparables con los de la estadística ministerial (9). Los covariogramas espaciales utilizados para los distintos códigos postales de Toledo capital pueden verse en Montero (2004). En el caso espacio-temporal se ha utilizado la función espacio-temporal no separable de Gneiting (2002), una función de covarianza suficientemente general como para ser válida en el caso de precios inmobiliarios:

$$C(\mathbf{h},\tau,\theta)=\frac{\sigma^2}{(a\tau^{2\alpha}+1)}\exp\left(\frac{-c\mathbf{h}^{2\delta}}{(a\tau^{2\alpha}+1)^{\beta\delta}}\right),\ (\mathbf{h},\tau)\in\mathbb{R}^d\times\mathbb{R},\ [4]$$

donde a y c son dos parámetros positivos de escalamiento espacial y temporal, respectivamente, y σ^2es la varianza *a priori* del proceso estocástico; δ y α son dos parámetros de suavizado espacial y temporal, respectivamente, que toman valores en (0, 1]; y β es el parámetro de interacción espacio-temporal, cuyo campo de variación es [0, 1]. Mayores β implican mayor grado de dependencia espacio-temporal (no separable) en el proceso objeto de estudio.

Con el fin de aislar la componente espacial de los precios por metro cuadrado de las viviendas, en Montero (2004) se procedió a la estimación, mediante un análisis de la varianza, de los efectos de los niveles de las características «estado de la vivienda», «superficie» y «tenencia o no de garaje» sobre los mismos. Una vez obtenida la clase de viviendas equivalentes (viviendas sin garaje, reformadas o nuevas y de 65 a 120 m^2), es de esperar que la única fuente de variación de los precios de las mismas sea su ubicación geográfica. Una vez obtenida la estimación *krigeada* de las viviendas equivalentes, deberán incorporarse los efectos de los testigos «estado de la vivienda», «superficie» y «tenencia o no de garaje» al precio estimado.

En lo que se refiere a la estimación *krigeada* de los precios de las viviendas equivalentes, con los covariogramas meramente espaciales se llevó a cabo la resolución de 140 sistemas de ecuaciones de *krigeado* de la media (uno para cada código postal y trimestre de los cinco años de la simulación). Con la función de covarianza espacio-temporal no separable de Gneiting se procedió al *krigeado* espacio-temporal de la media en los siete códigos postales de la ciudad. El procedimiento de agregación de las medias trimestrales de los códigos postales para generar la media anual de la ciudad es, lógicamente, el mismo que utiliza el Ministerio. La estimación de los ponderadores de los estimadores *krigeados* espaciales y espacio-temporales de la media se realizó mediante la programación de las rutinas pertinentes en lenguaje R (R Core Team, 2015).

En el cuadro n.º 1 se exponen las estimaciones espaciales y espacio-temporales anuales del precio medio de la vivienda en Toledo capital, junto con las proporcionadas por el Ministerio de Fomento, así como el índice y los geoíndices espaciales y espacio-temporales del precio de la vivienda en Toledo en la referencia temporal considerada.

Como puede apreciarse, la metodología ministerial arroja precios medios inferiores a los aportados por la metodología del *krigeado* de la media, como consecuencia, entre otras cosas, de no tener en cuenta la correlación espacial existente entre los precios de las viviendas. Éstos, a su vez, son inferiores a los que se obtienen cuando se consideran las interacciones espacio-tiempo. La evolución relativa del precio del metro cuadrado de la vivienda también depende fuertemente de si se utiliza un índice, un geoíndice espacial o un geoíndice espacio-temporal. Lo importante, en todo caso, es que en presencia de correlación espacio-temporal, la estimación *krigeada* de la media nos aleja de los resultados proporcionados por el antiguo estimador ministerial (la media aritmética) y, en consecuencia, genera una serie de precios de vivienda distinta.

2. Predicción geoestadística de precios de vivienda en la ciudad de Madrid

En esta subsección se centra la atención en otro aspecto de vital interés para los agentes participan-

CUADRO N.º 1

PRECIO MEDIO DEL METRO CUADRADO DE LA VIVIENDA LIBRE. ÍNDICE Y GEOÍNDICES DEL PRECIO DEL METRO CUADRADO. TOLEDO CAPITAL. 1995-2000

AÑO	*ESTIMACIÓN MINISTERIAL*	*ESTIMACIÓN KRIGEADA ESPACIAL*	*ESTIMACIÓN KRIGEADA ESPACIO-TEMPORAL*	*DIFERENCIA*	*ÍNDICE*	*GEOÍNDICE ESPACIAL*	*GEOÍNDICE ESPACIO-TEMPORAL*
1995	582,01	632,28	648,3	50,18	100,00	100,00	100,00
1996	577,73	647,64	672,6	69,91	99,25	102,43	103,74
1997	586,42	639,76	658,9	53,34	100,74	101,18	101,63
1998	625,14	650,67	699,3	25,43	107,39	102,91	107,87
1999	652,89	706,79	715,4	53,09	112,16	111,78	110,35

Fuente: Elaboración propia a partir de la información suministrada por la Dirección General de Programación Económica y Presupuestaria del Ministerio de Fomento y Montero (2004).

tes en los mercados inmobiliarios: la predicción (en nuestro caso, desde la perspectiva geoestadística) de precios de bienes inmuebles. Para ello, se ha utilizado una base de datos, creada por los propios autores, de los precios (por metro cuadrado) y principales características de 1000 viviendas seleccionadas mediante un muestreo aleatorio simple entre las mostradas por el portal inmobiliario idealista.*com* en el primer trimestre de 2010. Se trata, pues, de precios de oferta y no de precios de transacción, pero este aspecto es irrelevante a efectos de ilustrar la predicción geoestadística de precios de vivienda. El gráfico 1 muestra dichos precios (en logaritmos) mediante un mapa de cuartiles (en el panel izquierdo) y un *scatterplot* tridimensional (en el panel derecho). En él puede apreciarse su comportamiento ciertamente irregular, así como su estructuración en círculos concéntricos.

GRÁFICO 1
PRECIO DE LA VIVIENDA (EUROS/M2, LOGS) EN MADRID, 2010, 1er TRIMESTRE

Gráfico 1a. Mapa de cuartiles

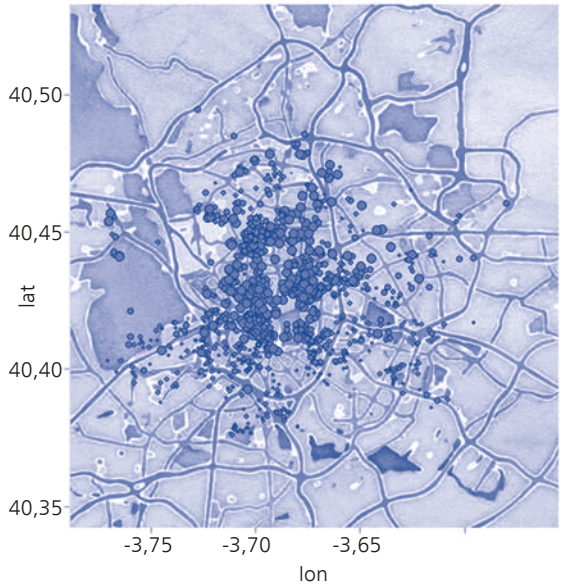
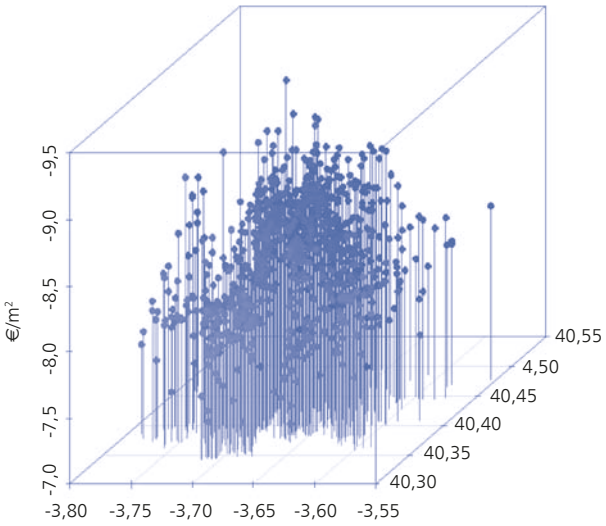


Gráfico 1b. 3D-scatterplot



CUADRO N.º 2

PRECIO Y CARACTERÍSTICAS INDIVIDUALES Y DE ÁREA DE LAS VIVIENDAS MUESTREADAS. DESCRIPCIÓN Y MEDIDAS DE SÍNTESIS

VARIABLE	*DESCRIPCIÓN*	*MEDIA*	*DESVIACIÓN TÍPICA*
	Variable respuesta		
Log(Precio, euro/m2)	Logaritmo del precio de la vivienda (euro/m^2)	8,17	0,33
	Localización: coordenadas espaciales		
Coordenada X	Longitud		
Coordenada Y	Latitud		
	Características individuales		
Estado	Indicador de buen estado	85%	
Superficie construida	Número de m^2 de superficie construida	96,54	69,53
Tipo de vivienda			
Ático	Indicator de ático	6,10%	
Piso	Indicador de piso	88,70%	
Estudio	Indicador de estudio	2,80%	
Casa	Indicador de casa	2,40%	
Antigüedad	Antigüedad de la vivienda	24,33	12,19
Piso (altura)			
Bajo	Indicador de bajo	2,80%	
1.ª planta	Indicador de 1.ª planta	23,20%	
2.ª-3.ª planta	Indicador de planta 2.ª y 3.ª	40,90%	
4.ª-5.ª planta	Indicador de planta 4.ª y 5.ª	19,10%	
6.ª planta o más	Indicador de 6.ª planta o más	14%	
Baños	Número de baños	1,5	0,83
Garaje	Indicador de tenencia de garaje	28%	
Ascensor	Indicador de tenencia de ascensor	66%	
Aire acondicionado	Indicador de tenencia de aire acondicionado	56,80%	
Piscina	Indicador de tenencia de piscina	16,30%	
Hipoteca mensual	Hipoteca mensual (euros/mes)	1.450,96	1.183,62
	Características de área		
ICA	Indicador de calidad del aire (tipificado) (y de la contaminación odorífera en la versión subjetiva)	-0,14 (28%)	1,05 (11%)
Área comercial	Indicador de área comercial	41%	
Casco histórico	Indicador de zona histórica	34%	
Jubilados (% distrito)	Porcentaje de jubilados (distrito)	18,43	2,78
Infantil (% distrito)	Porcentaje de niños menores de 14 años (distrito)	12,91	2,19
Inmigrantes (% distrito)	Porcentaje de población inmigrante (distrito)	12,89	4,67
Delincuencia	Tasa de delincuencia (distrito)	0,44	0,16
Hipoteca mensual área	Hipoteca mensual del área (euros/mes)	3.443,78	853,66

Las características de los inmuebles muestreados (dos de localización espacial, once específicas de la vivienda y ocho de área) se muestran en el cuadro n.º 2. El precio por metro cuadrado de la vivienda, así como la información sobre sus principales testigos individuales (antigüedad, superficie, etc.), calidad y equipamiento de la misma, se obtuvieron del portal inmobiliario idealista.com. También se obtuvo de dicho portal la información de carácter hipotecario. Los registros sobre las características de área se tomaron de la base de datos ALMUDENA. Las coordenadas espaciales identificativas de la localización exacta de la vivienda (expresadas en grados decimales) se obtuvieron de Google Maps. Finalmente, la información sobre el indicador de calidad ambiental se generó a partir de las mediciones facilitadas por

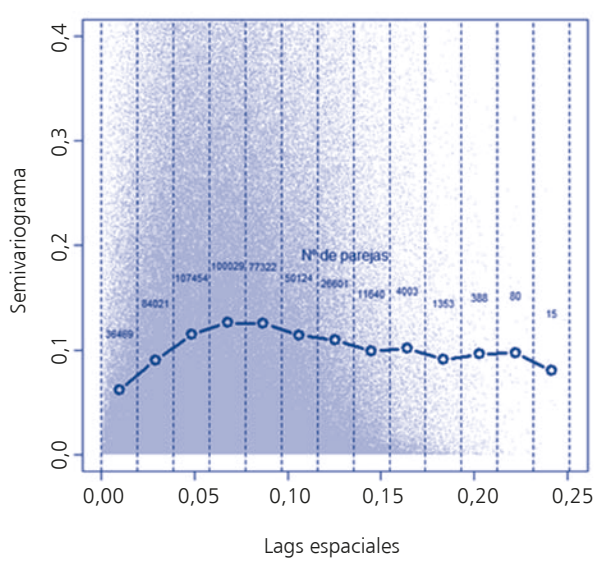
el Sistema Integral de Calidad del Aire del Ayuntamiento de Madrid, en su versión objetiva, y se obtuvo del Censo de Población y Viviendas, en su versión subjetiva.

Con los precios (en logaritmos) del millar de viviendas muestreadas se construyó el semivariograma empírico de los mismos (gráfico 2), para, a partir de él, determinar si existe dependencia espacial en los precios de la vivienda en la ciudad de Madrid y, en caso afirmativo, estimar el modelo semivariográfico válido que mejor la representa. El semivariograma empírico utilizado fue el propuesto en Cressie y Hawkins (1980), muy robusto en presencia de precios-*outlier* (que pueden apreciarse en el gráfico 1b), que viene dado por la expresión:

$$\gamma^*_{CH}(\mathbf{h}) = \frac{1}{2}\left[0{,}457 + \frac{0{,}494}{N(\mathbf{h})}\right]^{-1} \left[\frac{1}{N(\mathbf{h})}\sum_{i=1}^{N(\mathbf{h})} \left|X(\mathbf{s}_i+\mathbf{h}) - X(\mathbf{s}_i)\right|^{1/2}\right]^4 \qquad [5]$$

donde $X(\mathbf{s}_i)$ representa el precio de una vivienda en la localización $\mathbf{s}_i$, $X(\mathbf{s}_i+\mathbf{h})$ es el precio de una vivienda a una distancia h de $\mathbf{s}_i$ (en cualquier dirección), y $N(\mathbf{h})$ es el número de pares de viviendas separadas por una distancia h, en cualquier dirección.

GRÁFICO 2
NUBE SEMIVARIOGRÁFICA Y SEMIVARIOGRAMA EMPÍRICO (ESTIMADOR DE CRESSIE Y HAWKINS) DEL LOGARITMO DEL PRECIO DE LA VIVIENDA



El semivariograma empírico obtenido no tiene una interpretación sencilla. En primer lugar, parece no estabilizarse al aumentar la distancia entre las parejas de viviendas, lo que indica que pudiera no ser estacionario; además, parece incorporar una estructura de U invertida compatible con la distribución concéntrica de precios anteriormente aludida. Dada la potencial no estacionariedad de los precios de la vivienda en la ciudad de Madrid, la predicción de los mismos basada en el KO (procedimiento habitual en la literatura geoestadística, aunque en muchas ocasiones no está justificado) no parece apropiada. En esta tesitura, la predicción geoestadística deberá realizarse mediante procedimientos de *krigeado* más sofisticados, como el KU, el KDE, o aquellos que extraen explícitamente «algo estacionario» del proceso estocástico no estacionario representativo de los precios de la vivienda en Madrid (KR). No obstante lo anterior, se ha llevado a cabo un KO de dichos precios a modo de referencia, para poder evaluar el efecto de considerar estacionarios precios que no lo son. Nótese que no se establecieron de forma previa clases equivalentes de viviendas, y que las diferentes características (individuales o de área) de las viviendas pudieran estar detrás de la no estacionariedad de sus precios. Sin embargo, los procedimientos de *krigeado* no ordinario anteriormente mencionados mitigan significativamente este problema (sobre todo el KDE).

La bondad de los diferentes procedimientos de *krigeado* llevados a cabo se mide mediante un proceso de validación cruzada del tipo *leave-one-out*. Es decir, el precio de cada una de las mil viviendas de la muestra es obtenido mediante el correspondiente *krigeado* de los precios de las 999 restantes, calculándose posteriormente las medidas indicadoras de la bondad de las predicciones llevadas a cabo. Estas son:

a) El error medio de predicción, $EMP = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X(\mathbf{s}_i) - \hat{X}(\mathbf{s}_i))$, que debería estar en torno a cero, indicando la no existencia de errores de predicción sistemáticos. No obstante, las predicciones *krigeadas* son insesgadas; así, independientemente de las decisiones adoptadas, el EMP esperado es prácticamente nulo.

b) La raíz cuadrada del error cuadrático medio de predicción, $RECMP = +\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X(\mathbf{s}_i) - \hat{X}(\mathbf{s}_i))^2}$, que indica tanto mejores predicciones cuanto menor es su valor.

c) El error cuadrático medio estandarizado de predicción, $ECMEP = +\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X(\mathbf{s}_i) - \hat{X}(\mathbf{s}_i)}{\hat{\sigma}(\mathbf{s}_i)}\right)^2$, cuyo valor

debe ser cercano a la unidad, indicando la compatibilidad de los errores de predicción con la varianza de predicción *krigeada* $\hat{\sigma}^2(\mathbf{s}_i)$.

A la hora de proceder al KO de los precios muestreados, se ha utilizado un semivariograma esférico isotrópico, $\gamma(\mathbf{h})=m\left(\frac{3}{2}\frac{\|\mathbf{h}\|}{a}-\frac{1}{2}\left(\frac{\|\mathbf{h}\|}{a}\right)^3\right)$ si $\|\mathbf{h}\|\leq a$ y $\gamma(\mathbf{h})=m$ si $\|\mathbf{h}\|>a$, que, al ser lineal cerca del origen, representa muy bien fenómenos continuos con un cierto grado de irregularidad, caso de los precios de la vivienda en Madrid. En el semivariograma anterior, $\|\mathbf{h}\|$ representa el módulo del vector distancia entre viviendas, m es la meseta, o varianza del proceso estocástico generador de los precios observados, y a es el alcance o rango de la dependencia espacial de tales precios. Las estimaciones de dichos parámetros fueron $m=0{,}123$ y $a=0{,}066$ y se realizaron con la librería geoR (Ribeiro y Diggle, 2015) del *software* estadístico R.

En el caso del KU, la deriva se estima únicamente en base a las coordenadas espaciales, con lo cual la heterogeneidad espacial queda recogida en tanto en cuanto dicha deriva sea capaz de recogerla, mientras que la autocorrelación espacial es capturada por el *krigeado* de los residuos. Como se avanzó anteriormente, la expresión de la deriva incluida en el KU tiene validez local (si su validez fuese global estaríamos en el caso de un KR). Las predicciones realizadas se han llevado a cabo utilizando tendencias espaciales paramétricas de primer, segundo y tercer orden, con tres vecindarios locales móviles distintos: 25, 100 y 250 viviendas (10). Como semivariograma residual se utilizó el semivariograma de los precios ya que, como puede verse en Montero, Fernández-Avilés y Mateu (2015), en un entorno de predicción pequeño el semivariograma de los residuos es aproximadamente igual al de los precios, dado que el valor de la deriva (local) se supone que no cambia significativamente.

En el KDE se ha utilizado una deriva externa construida a partir de las características individuales y de área listadas en el cuadro n.º 2, si bien, además, se ha considerado el caso en el que la deriva también incluye las coordenadas espaciales (hemos denominado a tal procedimiento *krigeado* con deriva total, KDT). El vecindario local considerado fue de 477 vecinos, el mínimo número de vecinos permitido por la librería gstats (Pebesma, 2004) dado el número de covariables contenidas en la deriva.

El gráfico 3 muestra el mapa de predicción KO de precios de vivienda en Madrid, en el primer trimestre de 2010, y el correspondiente mapa de

GRÁFICO 3
PREDICCIÓN KO DE PRECIOS DE VIVIENDA EN MADRID (2010, 1er TRIMESTRE; LOGS)

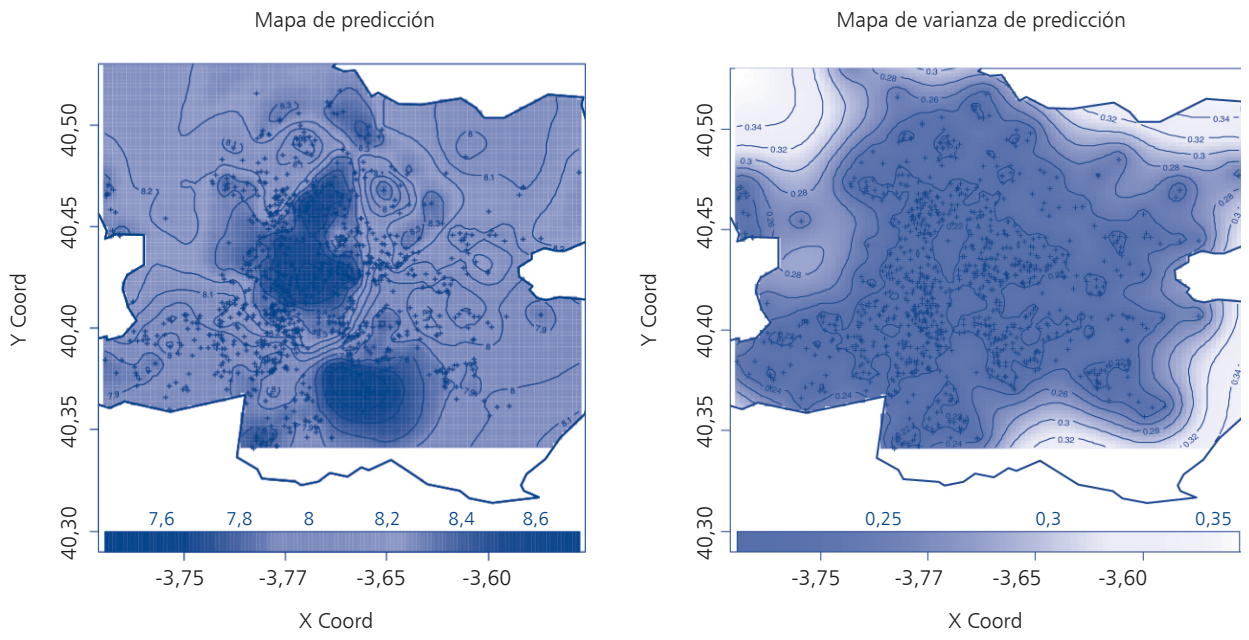
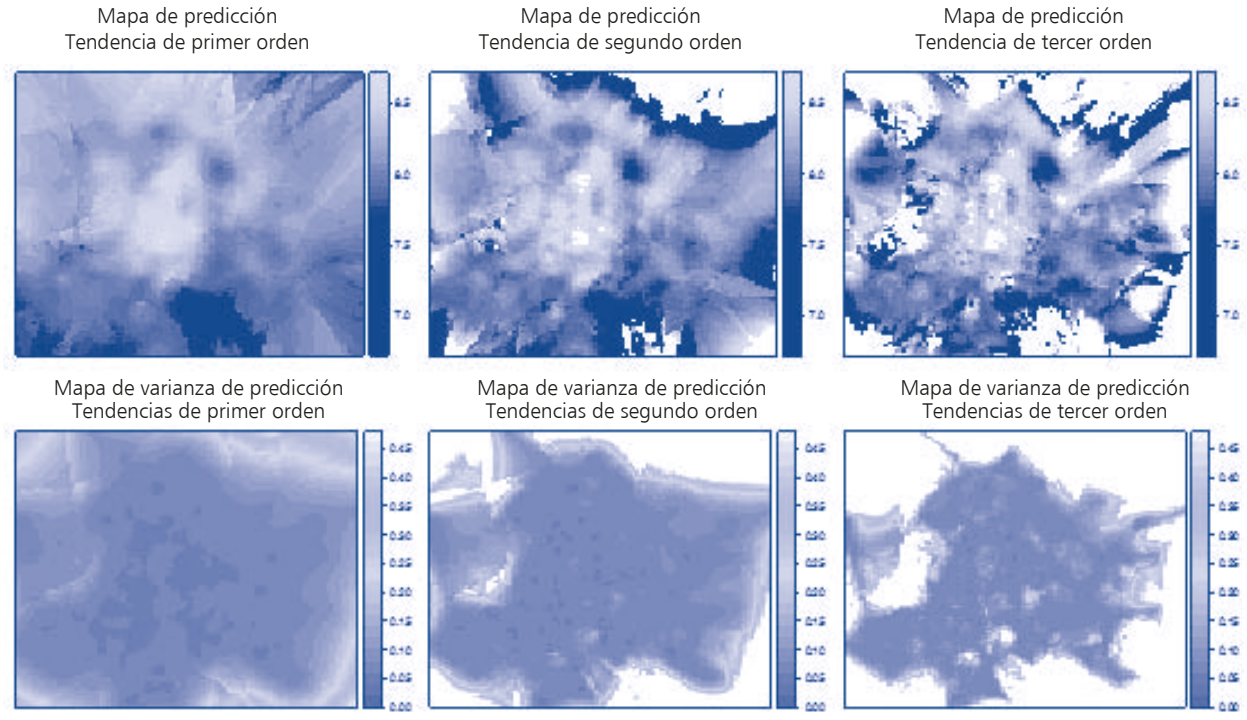


GRÁFICO 4
PREDICCIÓN KU DE PRECIOS DE VIVIENDA EN MADRID (2010, 1er TRIMESTRE; LOGS)

25 vecinos



100 vecinos

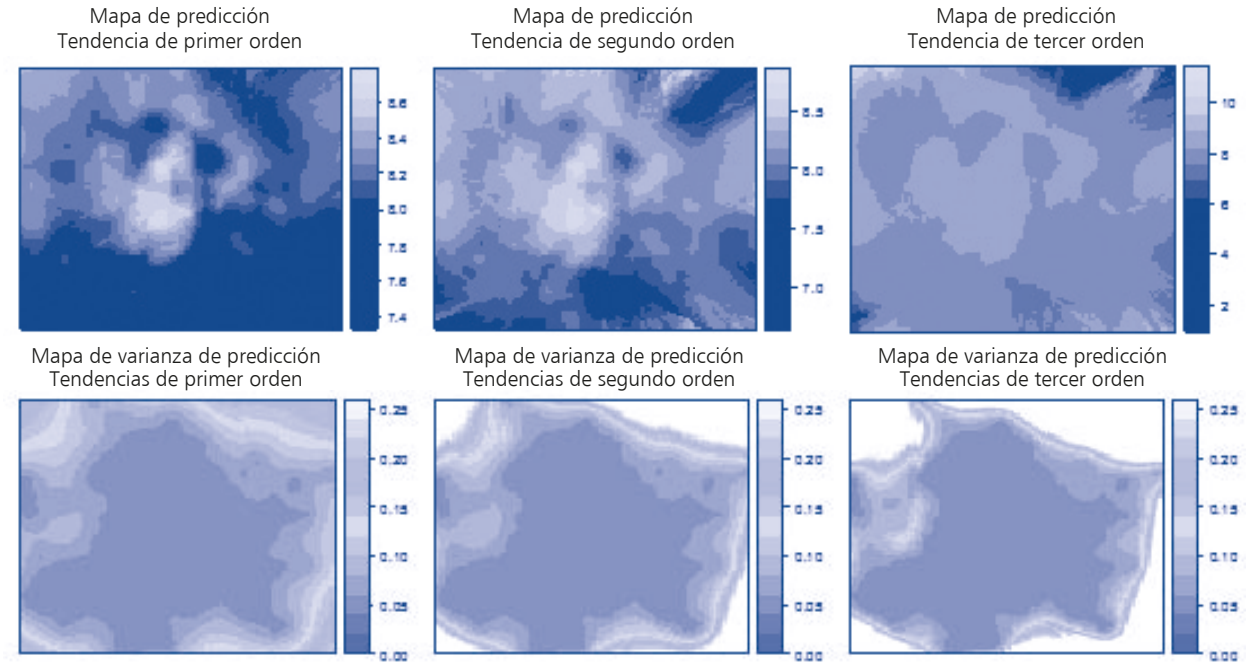


GRÁFICO 4 (*Continuación*)
PREDICCIÓN KU DE PRECIOS DE VIVIENDA EN MADRID (2010, 1er TRIMESTRE; LOGS) *(Continuación)*

250 vecinos

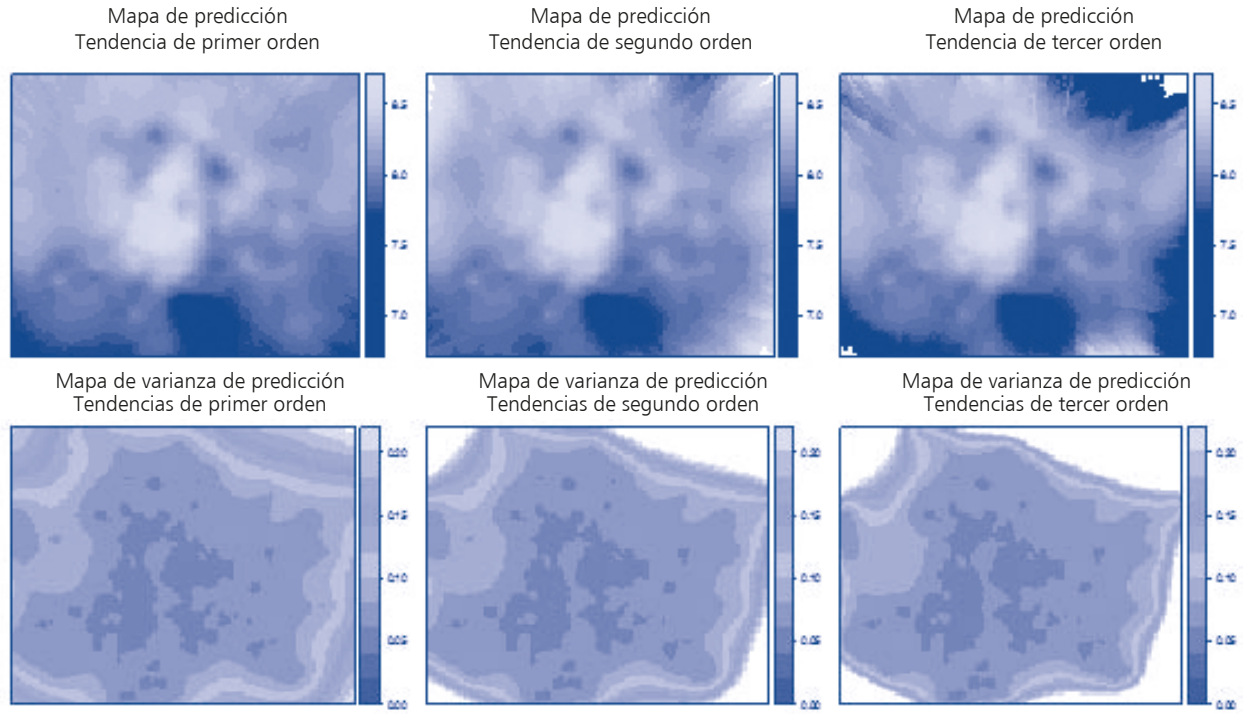


GRÁFICO 5
PREDICCIÓN KR DE PRECIOS DE VIVIENDA EN MADRID (2010, 1º TRIMESTRE; LOGS)

Tendencia paramétrica de primer orden

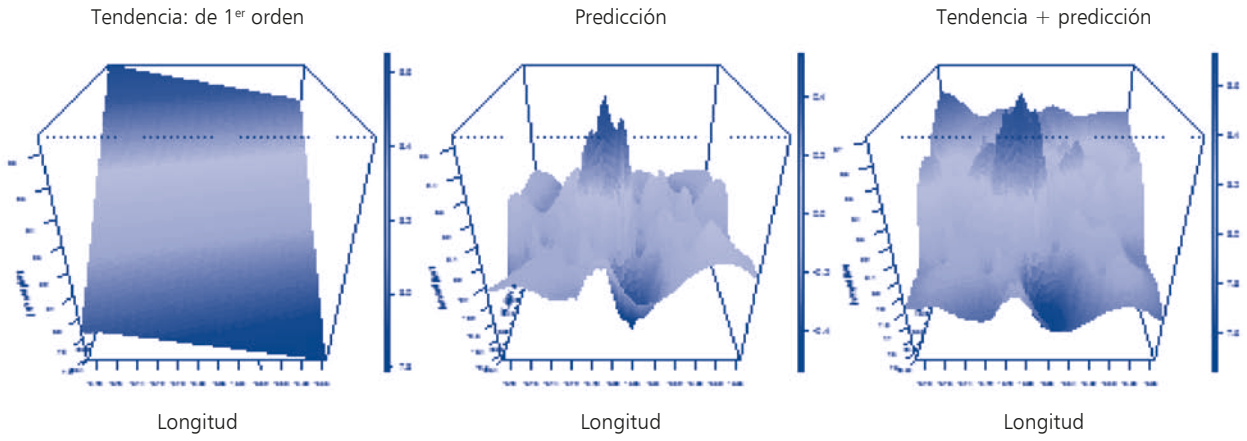
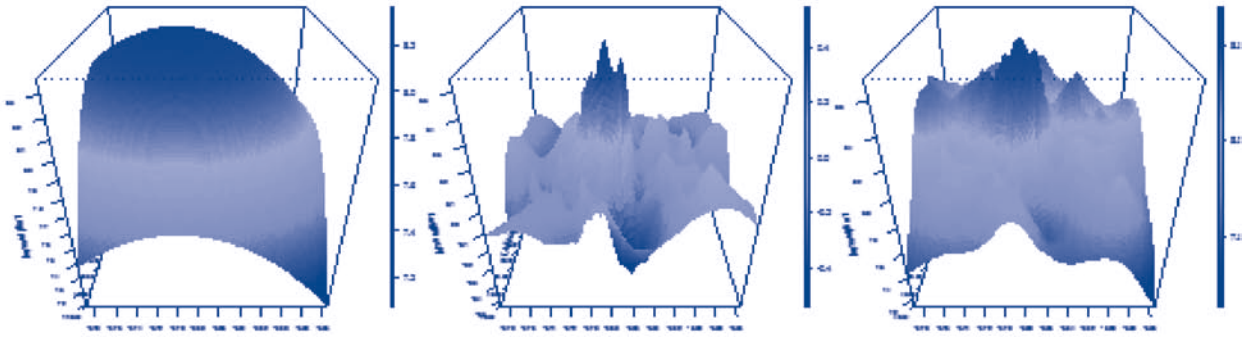


GRÁFICO 5 (*Continuación*)
PREDICCIÓN KR DE PRECIOS DE VIVIENDA EN MADRID (2010, 1er TRIMESTRE; LOGS) *(Continuación)*

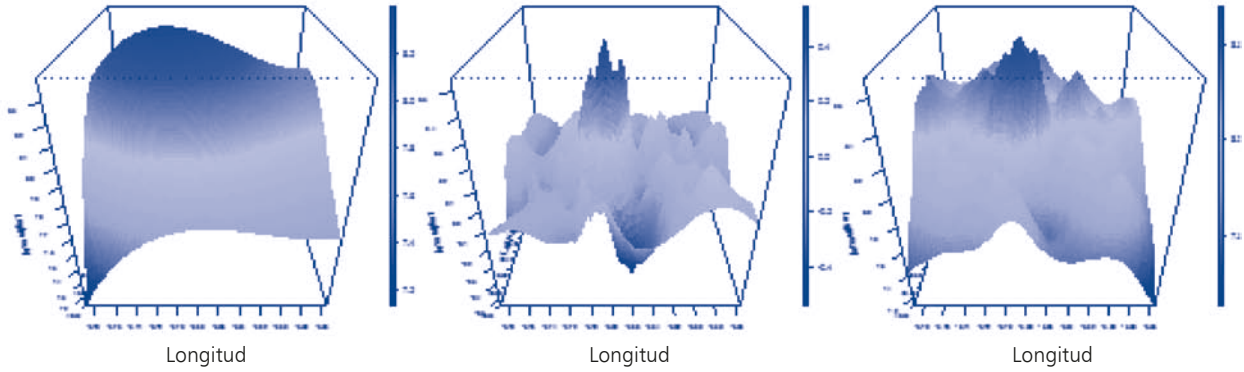
Tendencia paramétrica de segundo orden

Tendencia: de 1er orden | Predicción | Tendencia + predicción



Tendencia paramétrica de tercer orden

Tendencia: de 1er orden | Predicción | Tendencia + predicción



Mapa de varianza de predicción
Tendencia de primer orden

Mapa de varianza de predicción
Tendencia de segundo orden

Mapa de varianza de predicción
Tendencia de tercer orden

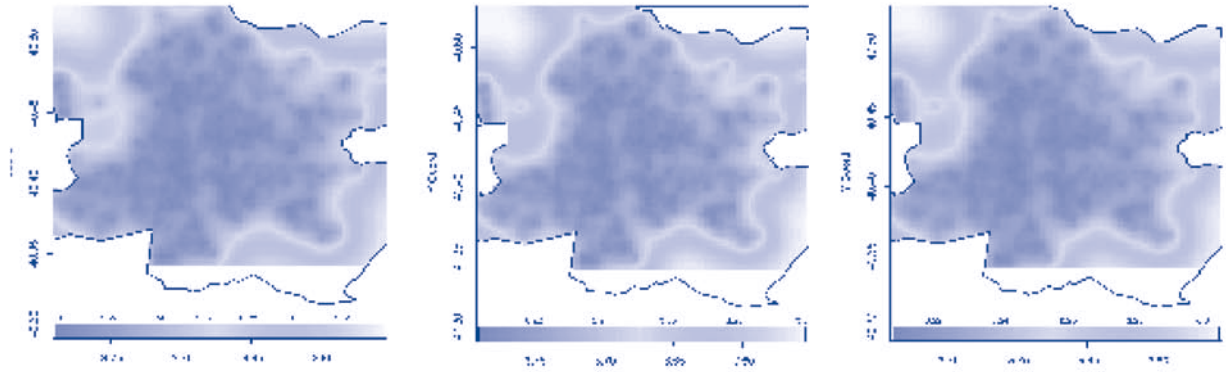
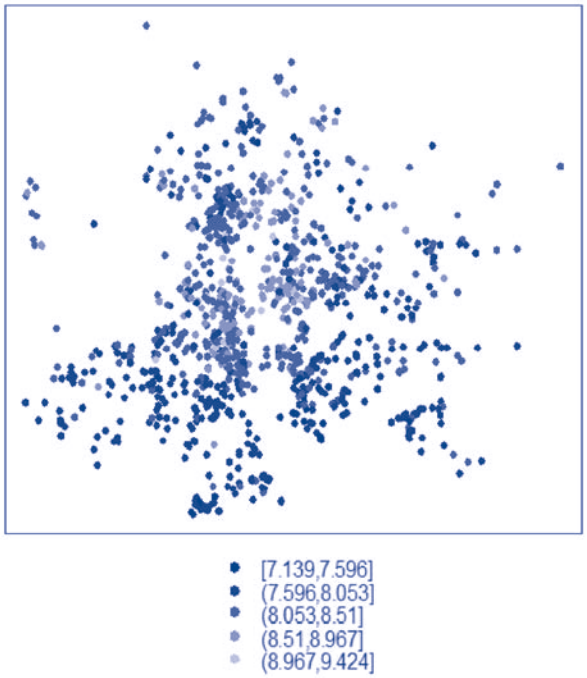


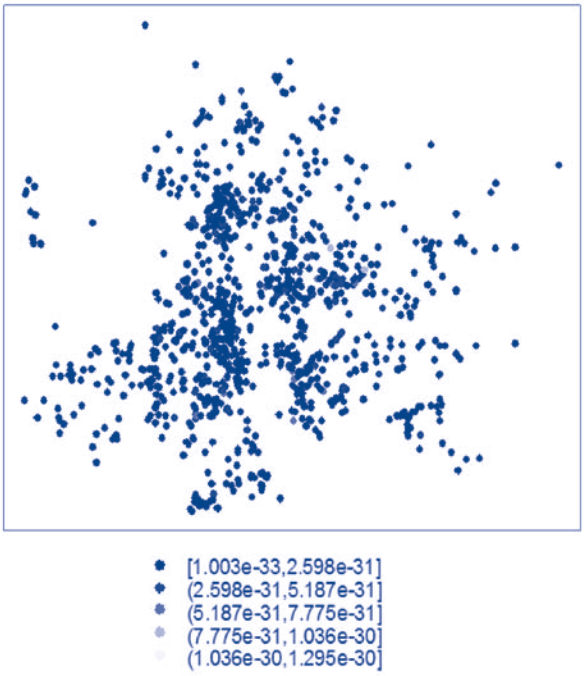
GRÁFICO 6

PREDICCIÓN KDE Y KDT DE PRECIOS DE VIVIENDA EN MADRID (2010, 1er TRIMESTRE; LOGS)

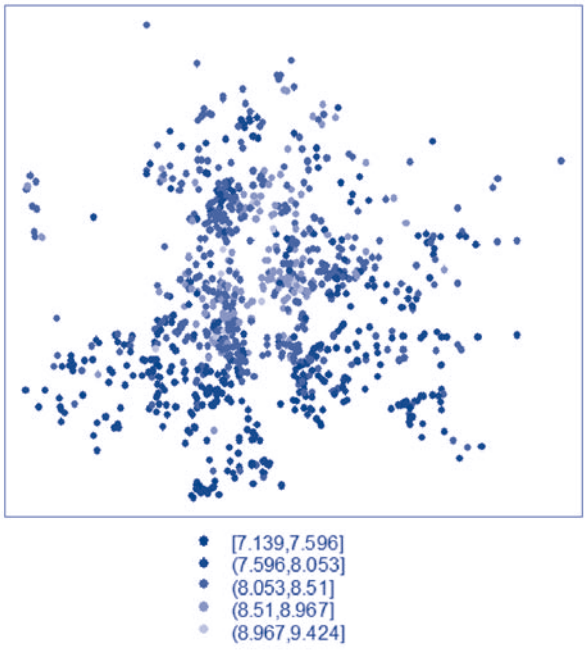
Mapa de predicción: KDE



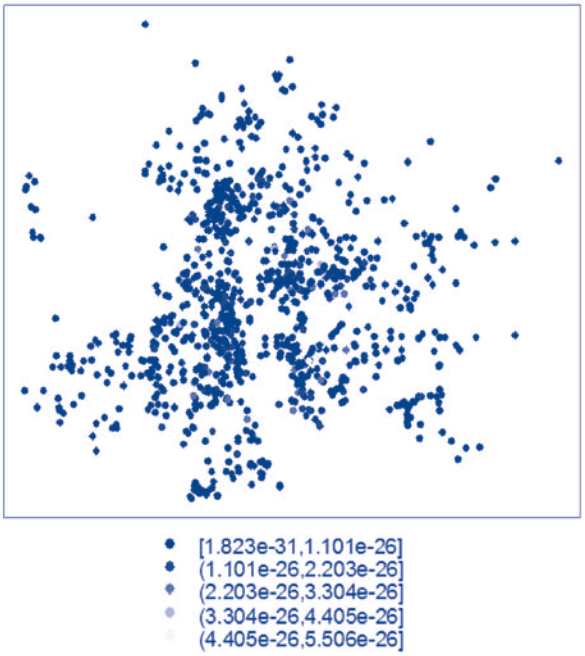
Mapa de varianza de predicción: KDE



Mapa de predicción: KDT



Mapa de varianza de predicción: KDT



varianzas de predicción (11). Los gráficos 4, 5 y 6 muestran dichos mapas para las predicciones KU, KR y KDE (o KDT), respectivamente. Como puede apreciarse, los patrones predictivos son similares con los cuatro procedimientos (si bien no lo son los errores de predicción; son sensiblemente menores en el caso del KDE), y la varianza del error de predicción disminuye con la flexibilidad de la deriva. El cuadro n.º 3 ofrece los estadísticos de bondad de predicción (EMP, RECMP y ECMEP) correspondientes a cada tipo de krigeado.

Como puede intuirse de los gráficos 3 y 4, y comprobarse en el cuadro n.º 3, las predicciones KO y KU no son muy distintas (excepción hecha del caso de KU con 25 vecinos y tendencia de segundo o tercer orden): el ECMP del KU permanece en niveles del correspondiente al KO, lo que implica una RECMP (en euros) del 27,5 por 100 en ambos casos. Por consiguiente, parece que lo que se gana en poder predictivo al considerar la no estacionariedad de los precios de vivienda, se pierde al considerar derivas paramétricas poco flexibles que parecen no representar la deriva real. Sin embargo, cuando se predice con KU, el ECMEP, que se cifra en 1,20 en el KO, se corrige y los errores de predicción con KU resultan compatibles con la varianza de predicción.

CUADRO N.º 3

MEDIDAS DE BONDAD DE PREDICCIÓN

	EMP	*RECMP*	*ECMEP*
KO	0.0001	0.2432	1.1990
KU, tendencia 1er orden, 25 vecinos	0.0000	0.2449	0.9740
KU, tendencia 1er orden, 100 vecinos	0.0009	0.2427	0.9744
KU, tendencia 1er orden, 250 vecinos	0.0009	0.2425	0.9742
KU, tendencia 2º orden, 25 vecinos	-0.0002	0.2773	1.0110
KU, tendencia 2º orden, 100 vecinos	0.0005	0.2435	0.9738
KU, tendencia 2º orden, 250 vecinos	-0.0002	0.2433	0.9755
KU, tendencia 3er orden, 25 vecinos	-0.0132	0.5026	0.9946
KU, tendencia 3er orden, 100 vecinos	0.0015	0.2563	0.9761
KU, tendencia 3er orden, 250 vecinos	-0.0001	0.2439	0.9722
KR, tendencia 1er orden	-0.0002	0.2431	1.3260
KR, tendencia 2º orden	0.0005	0.2433	1.2730
KR, tendencia 3er orden	0.0004	0.2431	1.2280
KDE	0.0004	0.2049	0.9962
KDT	0.0031	0.2047	1.0089

En cuanto a los resultados derivados del KR (12), los rasgos básicos de los mapas de predicción no varían sustancialmente como consecuencia de utilizar uno u otro orden para la tendencia. Tampoco varían los estadísticos de bondad de ajuste, que no muestran mejores resultados que los obtenidos con KO y son ligeramente peores que los proporcionados por el KU (sobre todo en lo que se refiere al ECMEP). En otras palabras, estimar una tendencia espacial paramétrica global, del orden que sea, y realizar posteriormente un KO de los residuos resultantes no ofrece ventaja alguna sobre el KO directo de los precios y, además, proporciona resultados ligeramente peores que los obtenidos con tendencia paramétrica espacial de carácter local.

Sin embargo, el KDE, estimándose la deriva externa a través de las covariables expuestas en el cuadro n.º 2, reduce entre un 16 por 100 y un 26 por 100 la RECMP obtenida con KO, KU y KR (excepción hecha del caso del KU con tendencia de tercer orden y 25 vecinos, en el que dicha reducción casi alcanza el 60 por 100). Hay que hacer notar que el hecho de incluir las coordenadas geográficas de la vivienda en el conjunto de las covariables (KDT) no produce mejora predictiva significativa alguna. Además, de las pruebas realizadas con diferentes tamaños de vecindario, se deduce que los resultados son tanto mejores cuanto más «local» se considera la deriva externa. Este hecho nos lleva a pensar que una RGP con pequeño tamaño de ventana también podría ser una buena estrategia de predicción de precios de vivienda en Madrid.

De los anteriores resultados se deduce (en el caso de Madrid, en la referencia temporal considerada) la necesidad de considerar las características individuales y de área de las viviendas a la hora de predecir su precio, no pareciendo tan relevante la ubicación geográfica de las mismas (cuyo efecto lo absorben las variables de área). En otros términos, tras el estallido de la burbuja inmobiliaria parece que el efecto espacial realmente importante en los precios de la vivienda era la heterogeneidad espacial derivada de las características (sobre todo de área) de las viviendas. La autocorrelación espacial de los precios, una vez considerada la heterogeneidad espacial de los mismos, queda en un segundo plano. Abundando en la cuestión, desde el punto de vista geoestadístico parece de todo punto necesario la previa estratificación de las viviendas en clases equivalentes antes de hacer un KO de los precios de «dichas viviendas equivalentes», si bien, a efectos prácticos, resulta menos intensivo en tiempo un KDE de los precios de las mismas sin realizar previamente equiparación alguna.

IV. CONCLUSIONES

La vivienda es el bien de primera necesidad más caro de nuestra sociedad, y a él, según la Constitución española, tienen derecho todos los españoles. Su precio incluso pudiera incluso estar detrás de las decisiones migratorias de algunos ciudadanos. Por consiguiente, la vivienda, y en concreto el acceso a la misma, está en el centro del proceso de cohesión social de cualquier sociedad desarrollada.

Sin embargo, no parece existir una intensa relación directa entre la importancia del precio de la vivienda y el calado en la sociedad de la información procedente de las estadísticas sobre dicho precio. Quizá porque un precio medio –que, además, en algunos casos, no proviene de transacciones efectivamente realizadas, sino de operaciones de tasación, y cuya máxima desagregación geográfica son los municipios de más de 25.000 habitantes– no resulte de utilidad para el ciudadano. Quizá porque índices de precios de vivienda agregados tampoco sean de utilidad alguna para los agentes involucrados en los mercados inmobiliarios.

En el caso de la utilización de precios medios, está demostrado que éstos no constituyen el mejor estimador del comportamiento central de los precios de mercado. Dada la naturaleza inherentemente espacial (o espacio-temporal) de los precios de los bienes inmuebles, los promedios meramente aritméticos deben sustituirse por promedios *krigeados* (espacial o espacio-temporalmente). En este artículo, la comparación de ambos procedimientos se ha ilustrado mediante la elaboración de un geoíndice espacial y otro espacio-temporal para el precio de la vivienda en la ciudad de Toledo.

Pero lo que realmente es de utilidad para un ciudadano no es un promedio o una tasa de variación agregada, sino un sistema que le permita incluir la ubicación de la vivienda en la que tiene interés y sus principales características (tanto individuales como de área) y le proporcione el precio de la misma, con el menor error posible respecto del precio real de mercado. La geoestadística es una de las disciplinas que proporciona estos «sistemas», que no son sino los procedimientos de *krigeado* expuestos en este artículo: los *krigeados* universal y de los residuos (si se ha llevado a cabo previamente un proceso de equivalencia de viviendas) y el *krigeado* con deriva externa (en caso contrario). En este artículo, estos procedimientos de *krigeado* se han ilustrado mediante la construcción de mapas de precios de vivienda para la ciudad de Madrid. De los resultados obtenidos, se concluye la necesidad de trabajar con muestras estratificadas o viviendas equivalentes o, lo que es lo mismo (y más operativo), utilizar como procedimiento de predicción el krigeado con deriva externa o total. De esta manera, no solo se incorpora en la predicción la autocorrelación espacial de los precios, sino también la heterogeneidad espacial (vía coordenadas y variables de área).

Dado que la deriva parece tener un carácter marcadamente local, difícil de ser capturado por especificaciones paramétricas globales, la generación de procedimientos de *krigeado* con derivas no paramétricas (interna, externa, o ambas) constituye una interesante futura línea de investigación. De esta manera, el carácter local de la deriva sería capturado por una deriva global que, además, permitiría establecer relaciones no lineales entre el precio de la vivienda y las variables que supuestamente lo determinan. En nuestra opinión, las derivas espaciales no paramétricas construidas a partir de B-*splines* penalizados tienen un potencial especialmente interesante.

La captura de los efectos espaciales (autocorrelación y heterogeneidad espacial) inherentes al precio de los bienes inmuebles también podría llevarse a cabo mediante modelos econométricos que incorporen derivas espaciales muy flexibles (como la anteriormente mencionada), relaciones no lineales entre las covariables y la variable respuesta, y un término de autocorrelación espacial de tipo autorregresivo (alguno de los pertenecientes a los conocidos como modelos SAR). Ésta también constituye una interesante línea de investigación en la que ya se está trabajando. Finalmente, y sobre la base del carácter local no estacionario de la deriva, desde la investigación geográfica, los modelos de regresión local, y concretamente los modelos de regresión geográficamente ponderada con pequeño tamaño de ventana, constituyen otra buena posibilidad para la predicción de precios de vivienda, al menos en Madrid.

En definitiva, aunque este artículo se ha centrado en los procedimientos geoestadísticos, los efectos espaciales (autocorrelación y heterogeneidad, básicamente) pueden capturarse de varias maneras y desde distintas perspectivas, por lo que éstas, lejos de considerarse excluyentes, podrían tener, más bien, carácter confirmatorio. Lo anterior puede generalizarse al caso espacio-temporal, si bien, por el momento, los desarrollos en la disciplina geoestadística parecen estar más avanzados que en la econometría espacial y la investigación geográfica (modelización local).

NOTAS

(1) Aunque sí de manera implícita, pues cuando la ocasión lo requiere, previamente se realiza una estratificación de la muestra (si su tamaño lo permite), o se construyen clases de vivienda equivalentes a lo Fotheringham, Brundson y Charlton (2002) o Montero y Larraz (2006).

(2) No seguimos la terminología de Anselin (1988), sino otra que creemos más clara, y que básicamente se deriva del trabajo de LeSage y Pace (2009).

(3) Utilizaremos los acrónimos en inglés, por ser los habitualmente utilizados en la literatura.

(4) Para detalles sobre la especificación y estimación de estos modelos, así como sobre la distinción entre impactos directos e indirectos, remitimos al lector a Anselin (1988) y LeSage y Pace (2009).

(5) Nótese que en estos modelos ya no se tienen los impactos (directos, indirectos y totales) en la variable respuesta de un cambio en una covariable, sino funciones de efectos que dependen del valor de dicha covariable, lo cual constituye un nuevo reto (los detalles sobre las funciones de efectos y su estimación pueden verse en Montero, Fernández-Avilés y Mínguez, 2015).

(6) Los detalles sobre procedimientos de *krigeado* (sea puntual o por bloques), y en particular sobre *krigeado* universal, pueden verse en Montero, Fernández-Avilés y Mateu (2015).

(7) Debido a este tipo de inconveniente, producto de la descomposición asumida, Matheron desarrolló la teoría de funciones aleatorias intrínsecas de orden *k* y covarianzas generalizadas.

(8) En la actualidad, dicha información ya no está disponible. Sin embargo, como consecuencia de anteriores investigaciones, uno de los autores dispone de ella, desde 1987 (inicio de la serie) hasta 1999, para los municipios de Castilla-La Mancha. Hasta 1995 el número de tasaciones registradas no era suficiente para obtener resultados representativos.

(9) Cualquier otra disposición que respete la pertenencia a los códigos postales no alteraría significativamente los resultados obtenidos.

(10) Los resultados no cambian significativamente con otras especificaciones del vecindario local del entorno de las utilizadas.

(11) Nótese que en la parte sur de la ciudad el mapa de predicción aparece en blanco por debajo de una determinada línea. La explicación radica en que cuando se utilizó la librería GeoR se realizaron las estimaciones sobre el cuadrado que contenía las 1.000 localizaciones de las viviendas cuyo precio se observó, habiéndose superpuesto posteriormente el contorno del municipio de Madrid. Lo mismo ocurre en los mapas de la varianza de predicción del gráfico 5, que también se realizaron con la misma librería. Se trata de una limitación de la librería GeoR, con la cual se ha diseñado el mapa.

(12) En realidad, un KR es un KU con tendencia paramétrica global. Por tanto, las predicciones KR incorporan la heterogeneidad espacial en la medida en la que las tendencias paramétricas consideradas sean capaces hacerlo; la autocorrelación espacial se considera en el krigeado de los residuos resultantes.

BIBLIOGRAFÍA

Anselin, L. (1988), *Spatial Econometrics: Methods and Models*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Banco de España (2015), *Boletín Económico* 03/2015, Banco de España, Madrid.

Banzhaf, H. S., y O. Farooque (2012), *Interjurisdictional Housing Prices and Spatial Amenities: Which Measures of Housing Prices Reflect Local Public Goods?,* WP 17809, National Bureau of Economic Research, Cambridge, MA.

Basile, R.; Durban, M.; Mínguez, R.; Montero, J. M., y J. Mur (2014), «Modelling regional economic dynamics: spatial dependence, spatial heterogeneity and nonlinearities», *Journal of Economic Dynamics and Control*, 48: 229-245.

Carbó, S., y F. Rodríguez (2015), «El sector inmobiliario español: ¿recuperación o estabilización?», *Cuadernos de Información Económica*, 248: 61-70.

Cressie N., y D. H. Hawkins (1980), «Robust estimation of the variogram: I», *Mathematical Geology*, 12: 115-125.

Fotheringham, A. S.; Brunsdon, C., y M. Charlton (2002), *Geographically Weighted Regression. The Analysis of Spatially Varying Relationships*, John Wiley & Sons, Chichester.

Gámez, M.; Montero, J. M., y N. García (2000), «Kriging Methodology for Regional Economic Analysis: Estimating the housing price in Albacete», *International Advances in Economic Research,* 6: 438-451.

García-Montalvo, J. (2001), «Un análisis empírico del crecimiento del precio de la vivienda en las comunidades autónomas españolas», *Revista Valenciana de Economía y Hacienda*, 2: 117-136.

Gigou, J. L. (1982), *La rente foncière: Les theories et leur evolution depuis 1650*, Economica, París.

Gneiting, T. (2002), «Nonseparable, stationary covariance functions for space-time data», *Journal of the American Statistical Association*, 97: 590-600.

Granelle, J. J. (1970), *Espacio urbano y precio del suelo*, Sirey, París.

Helbich, M.; Brunauer, W.; Hagenauer, J., y M. Leitner (2013a), «Data-driven regionalization of housing markets», *Annals of the Association of American Geographers*, 103: 871-889.

— (2013b), *Spatial Heterogeneity in Hedonic House Price Models: The case of Austria,* Tinbergen Institute Discussion Paper TI 2013-171/VIII, Tinbergen Institute, Rotterdam.

Hengl, T.; Heuvelink, G. B. M., y A. Stein (2003), Comparison of kriging with external drift and regression-kriging, Technical note, ITC. https://www.itc.nl/library/.../hengl_comparison.pdf

Huang, B.; Wub, B., y M. Barry (2010), «Geographically and temporally weighted regression for modeling spatio-temporal variation in house prices», *International Journal of Geographical Information Science*, 24: 383-401.

Kuntza, M., y M. Helbichab (2014), «Geostatistical mapping of real estate prices: an empirical comparison of kriging and cokriging», *International Journal of Geographical Information Science*, 28: 1904-1921.

LeSage, P., y R. K. Pace (2009), *Introduction to Spatial Econometrics*, Chapman &Hall/ CRCPress, Boca Ratón.

Manganelli, B.; Pontrandolfi, P.; Azzato, A., y B. Murgante (2014), «Using Geographically Weighted Regression for Housing Market Segmentation», *International Journal of Business Intelligence and Data Mining,* 9: 146-159.

Martínez-Pagés, J., y L. A. Maza (2003), *Análisis del Precio de la Vivienda en España,* Documento de Trabajo 307, Servicio de Estudios, Banco de España, Madrid.

Montero, J. M. (2004), «El precio medio del metro cuadrado de vivienda libre: Una aproximación metodológica desde la perspectiva de la Geoestadística», *Revista de Estudios de Economía Aplicada*, 22: 675-694.

Montero, J. M.; Fernández-Avilés, G., y J. Mateu (2015), *Spatial and Spatio-Temporal Geostatistical Modeling and Kriging*, Wiley, Chichester.

Montero, J. M.; Fernández-Avilés, G., y R. Mínguez (2015), Spatial Hedonic Housing Price Models Accounting for Spatial Autocorrelation, Spatial Heterogeneity and Non-Linearity. Prediction and Assessment of Environment Impacts. Presented at the 25th Annual TIES Conference, November 22-25, 2015, United Arab Emirates (UAE) University, Al Ain, UAE.

Montero, J. M., y B. Larraz (2006), «Estimación espacial del precio de la vivienda mediante métodos de Krigeado», *Estadística Española*, 162: 201-240.

— (2011), «Interpolation Methods for Geographical Data: Housing and Commercial Establishment Markets», *Journal of Real Estate Research*, 33: 233-244.

— (2012), «Space-time approach to commercial property prices valuation», *Applied Economics*, 44: 3705-3715.

Montero, J. M.; Larraz, B., y A. Páez (2009), «Estimating Commercial Property Prices: An Application of Cokriging with Housing Prices as Ancillary Information», *Journal of Geographical Systems*, 11: 407-425.

Montero, J. M.; Mínguez, R., y M. Durbán (2012), «SAR models with nonparametric spatial trends. A P-spline approach», *Estadística Española*, 54: 89-111.

Osland, L. (2010), «An application of spatial econometrics in relation to hedonic house price modeling», *Journal of Real Estate Research*, 32: 289-320.

Pavlov, A. (2000), «Space varying regression coefficients: a semi-parametric approach applied to real estate markets», *Real Estate Economics*, 28: 249-283.

Pebesma, E. J. (2004), «Multivariable geostatistics in S: the gstat package», *Computers & Geosciences*, 30: 683-691.

Pignenburg, K. (2015), «The Spatial Dimension of US House Prices», *Urban Studies*, Publicado online el 6 de Octubre 2015 (pendiente de publicación en papel).

R Core Team (2015), R: A language and environment for statistical computing, R Foundation for Statistical Computing, Vienna. URL https://www.R-project.org/.

Ribeiro P., y P. Diggle (2015), GeoR: Analysis of Geostatistical Data. R package version 1.7-5.1. http://CRAN.R-project.org/package=geoR.

Tobler, W. R. (1970), «A computer movie simulation of urban growth in the Detroit region», *Economic Geography*, 46: 234-240.

Wackernagel, H. (2003), *Multivariate Geostatistics. An Introduction with Applications*, 3ª Ed., Springer-Verlag, Berlín.

Widłak, M.; Waszczuk, J., y K. Olszewski (2015), Spatial and hedonic analysis of house price dynamics in Warsaw, NBP WP 197, Narodowy Bank Polski, Warsaw.

Yu, D. L. (2006), «Spatially varying development mechanisms in the Greater Beijing area: a geographically weighted regression investigation», *The Annals of Regional Science*, 40: 173-190.