LA MEDICIÓN DE LA DESIGUALDAD ECONÓMICA

Rafael SALAS (*)

I. INTRODUCCIÓN

EL objetivo de este ensayo es proporcionar una visión panorámica del estudio moderno de la desigualdad económica que sea de utilidad práctica para el investigador. El enfoque moderno de la medición de la desigualdad económica, a partir de los trabajos pioneros de Kolm (1969, 1976a y b), Atkinson (1970) y Sen (1973), deja de ser un mero ejercicio estadístico de aplicación de un índice arbitrario de dispersión (como la varianza, el índice de Gini, etc.) sobre la distribución de rentas, y pasa a entenderse como una actividad más rigurosa que generalmente se enmarca en la economía del bienestar. De esta forma, la medición de la desigualdad alcanza cotas de aplicación más interesantes y, a su vez, se convierte en un campo de la teoría económica con entidad propia.

En este artículo se pasará revista a las herramientas necesarias para abordar con rigor la medición de este fenómeno complejo, que, como veremos, está lleno de numerosos matices. En muchas ocasiones, cuando la evolución de la desigualdad es clara y evidente, el uso de un índice u otro es una cuestión superflua. Sin embargo, en otros casos menos evidentes, el establecimiento de axiomas o postulados básicos, que sean razonables y comúnmente aceptados, es una cuestión clave para abordar con rigor el problema. A este respecto, sólo serán válidos aquellos índices que sean consistentes con los cambios predecibles ante condiciones cambiantes controladas, normalmente estipulados por los axiomas.

Este enfoque no está exento de dificultades conceptuales, que iremos relatando. Muchas veces estas dificultades conceptuales trascienden a elementos puramente económicos y entran dentro de otras disciplinas como la filosofía, la ética o la sociología. Alcanzar un acuerdo entre los economistas sobre el concepto de desigualdad es una tarea en principio complicada, dado los distintos puntos de vista subjetivos de cada uno. Amiel y Cowell (1992 y 1999) y Ballano y Ruiz-Castillo (1992) estudian mediante cuestionarios lo que la gente entiende por desigualdad. No obstante, iremos buscando un conjunto de mínimos que sean comúnmente aceptados. Una primera característica fundamental del enfoque moderno es que va más allá de la utilización de una simple medida o de un índice arbitrario que nos indique el grado de desigualdad; puesto que apunta a la realización de tests de dominancia entre dos situaciones que queramos comparar, en el sentido de que podamos asegurar que aumente o disminuya la desigualdad económica del paso de una a la otra, de acuerdo con toda una clase de medidas o índices que cumplan una serie de propiedades (y no sólo a unas medidas o índices arbitrarios). Es en este campo de la medición básica donde principalmente centraremos el estudio en este ensayo, en los apartados que van del II al IV.

No obstante, existe otro cúmulo de problemas asociados a la medición de la desigualdad en la práctica, que atañe al concepto de desigualdad entre hogares. Éstos, lejos de ser homogéneos, son hogares heterogéneos (la renta de un hogar compuesto por un individuo soltero no es directamente comparable con la misma renta en otro hogar compuesto por dos individuos casados con tres hijos, por ejemplo). Probablemente, algún tipo de equivalencia debe ser utilizado para hacer comparables ambas magnitudes. De una forma colateral, abordaremos esta cuestión en el apartado V.

¿Por qué es importante el estudio de la desigualdad económica? Tradicionalmente, los análisis y modelos económicos excluyen consideraciones distributivas. Siendo benévolos, probablemente la complejidad de su análisis sea la causa de dicha exclusión. Otra justificación cabría dentro de la concepción clásica de la separación entre cuestiones de eficiencia económica y distribución: los modelos tradicionales se centrarían en dar respuestas al primer elemento y relegarían a un segundo plano el otro elemento. Hoy en día, esta dicotomía clásica entre eficiencia y distribución está superada, y existen numerosos ejemplos que invitan a pensar en su interacción. Piense el lector escéptico en reformas impositivas que aumenten, por ejemplo, el tipo marginal máximo del impuesto sobre la renta.

La aparición en las economías actuales de un sector público muy desarrollado, con unos objetivos entre los que se encuentra el distributivo, estimula el desarrollo de la medición de la desigualdad en su doble faceta ya mencionada: redistribución vertical y desigualdad horizontal.

Con el desarrollo de la economía regional, es cada vez más importante observar desigualdades interregionales, y no sólo la desigualdad global. A este respecto, ciertas propiedades de descomposición por grupos de población de los índices de desigualdad son apropiadas para medir la desigualdad entre regiones.

Por otra parte, los ciudadanos admiten cada vez con más recelo que lo único importante sea la tasa agregada de crecimiento real de la economía, como postulan los modelos macroeconómicos y las previsiones de los gobiernos, y exigen a menudo a los responsables de la política económica consideraciones de carácter distributivo. Esta visión parcial agregada tiene incluso cabida en el análisis amplio de bienestar que proponemos; es el caso extremo neoclásico en el que la distribución no importa. La introducción de consideraciones distributivas operativas de distinta índole no hacen más que enriquecer el análisis.

La operatividad es importante, pues es la clave de su utilización práctica. Encontrar el equilibrio adecuado entre la resolución de estas cuestiones complejas con herramientas operativas es el gran reto de la economía moderna de la desigualdad. El avance en este sentido quizá sea la clave para, en un futuro, poder abordar y resolver las interacciones entre crecimiento y desigualdad en las economías modernas en modelos dinámicos. Éste es un gran déficit que tiene en su haber la teoría económica.

Hay numerosas cuestiones que no se desarrollan en este artículo y que constituyen temas de interés que están relacionados con la medición de la desigualdad. Por problemas de espacio, no serán objeto de estudio directo, pero sí conviene citarlas y proporcionar algunas referencias básicas que pueden ser útiles para investigadores interesados. Una ventaja es que son cuestiones en cierta medida independientes de las referentes a la medición básica, y pueden ser incorporadas en etapas diferentes. En primer lugar, podemos destacar cuestiones como la elección de la variable renta y la definición de la unidad perceptora de rentas. Esta última será tratada indirectamente, en cuanto está relacionada con la elección de la renta equivalente mencionada anteriormente.

Por otra parte, los estudios tradicionales de desigualdad se centran en la comparación de las rentas corrientes de los hogares (desigualdad estática). La teoría económica nos habla de que un concepto más adecuado sería comparar las rentas permanentes y aislarnos del problema de la etapa del ciclo vital en que se encuentran los hogares (desigualdad dinámica).

Una tercera cuestión, aún más compleja, es la medición de la desigualdad de oportunidades (la desigualdad que proviene de la no igualdad de oportunidades: la generada, por ejemplo, por cuestiones como la herencia o las aptitudes, externas al esfuerzo realizado por el individuo en la obtención de rentas).

Otro conjunto de problemas en la medición de la desigualdad es la separación de otros conceptos muy relacionados, pero no idénticos, como son la pobreza, la polarización, la movilidad, la desigualdad horizontal y la redistribución vertical debida a las actuaciones del sector público. Al final de este ensayo, en el apartado VI, se proporcionará, de una forma sucinta, una guía de estos conceptos y la bibliografía básica para su estudio.

A pesar de todas estas dificultades y obstáculos, aunque sea parcialmente, hoy en día podemos abordar y dar respuestas a muchas de las cuestiones anteriores. Hace tan sólo unos años estos problemas no estaban ni siquiera planteados. Suponemos que, con el avance de la ciencia, éste seguirá siendo el proceso en el futuro.

II. MEDICIÓN BÁSICA

Analicemos el caso más sencillo: la medición de la desigualdad económica entre hogares homogéneos. En principio, existen muchas formas estadísticas de medir la dispersión de una distribución, opciones que a primera vista pueden ser válidas para medir la desigualdad. En cualquier libro de texto de estadística descriptiva, se proponen un conjunto de medidas sintéticas que pueden ser útiles a este respecto, tales como la varianza, la desviación típica o el coeficiente de variación. Como veremos, algunas de ellas son más apropiadas que otras para medir la desigualdad. Por ejemplo, el coeficiente de variación es mucho más adecuado en ciertos contextos que la varianza o la desviación típica, como se verá a lo largo de este apartado y de los siguientes III y IV.

Probablemente, en esos libros de texto, quizá se nos sugiera igualmente que lo óptimo es no perder información individual y que se debería, en la medida de lo posible, utilizar toda la información disponible. Ello se resume en que deberíamos tener en cuenta toda la información de partida que viene dada por los vectores de renta iniciales. Suponemos que el vector de rentas iniciales de H hogares es:

$$Y = (Y_1, \dots ,Y_H)$$

Toda esa información también se dispone en funciones transformadas, como lo son las funciones de densidad o las funciones de distribución de la renta. Veremos que no todas esas formas son de igual valía para analizar la desigualdad. En concreto, la función de distribución acumulada y/o una variante suya, la curva de Lorenz, son mucho más interesantes para medir la desigualdad o el bienestar que, por ejemplo, la función de densidad.

La mayor generalidad o «bondad» de las conclusiones a que llegamos con el análisis de funciones como las descritas en el párrafo anterior se consigue a costa de un inconveniente operativo. Muchas veces, las situaciones que se nos presentan son incomparables, pues las funciones en su conjunto no apuntan inequívocamente siempre en una misma dirección: puede haber tramos que apuntan en un sentido y tramos que van en otro. Esto es lo que se conoce en la literatura como órdenes parciales o incompletos, puesto que hay situaciones no del todo comparables. Esta cuestión no ocurría «afortunadamente» con las medidas sintéticas, tales como la varianza o la desviación típica. No obstante, como se verá en el apartado IV, esto es a costa de imposiciones muy restrictivas que condicionan mucho la medida robusta de la desigualdad.

Entremos en el papel jugado por las restricciones, que es clave en el vínculo que liga a la medición de la desigualdad con la reordenación de distribuciones en términos de bienestar. La medida de desigualdad que adoptemos tiene que estar derivada de criterios éticos. El conjunto de criterios éticos se representa por un conjunto de restricciones o supuestos que reflejan nuestras preferencias sociales sobre las distribuciones. La clave consiste en elegir el conjunto de supuestos o restricciones aceptables para el que podamos establecer comparaciones de desigualdad y de bienestar. Normalmente, ese conjunto «aceptable» de restricciones nos lleva a órdenes parciales o incompletos. Es decir, a situaciones donde la incomparabilidad es posible. Sólo con la introducción de nuevas restricciones, que en numerosos casos son restrictivas y probablemente difíciles de interpretar con criterios éticos claros, dichas situaciones ambiguas podrían ser comparables. El enfoque moderno va por esta línea, la de establecer bajo qué conjunto de condiciones dos distribuciones son comparables entre sí (y en qué sentido), y no tanto por la visión clásica de analizar su comparación con una batería de índices arbitrarios.

¿Cómo se define el bienestar social? El teorema de imposibilidad de Arrow (1963) nos impide agregar preferencias ordinales individuales de un modo inequívoco, de acuerdo con unas propiedades aceptables. Una forma de resolver este inconveniente es definir la función de bienestar social individualista, sobre utilidades de los individuos (1),

$$W = w(U_1(Y_1), \dots ,U_H(Y_H))$$

a las que dotamos con un significado cardinal, de tal suerte que la agregación tiene en cuenta dos elementos: la intensidad de las preferencias individuales $U_i(Y_i)$ y de las preferencias sociales en el proceso de agregación $w(\cdot)$. Detrás de ello descansa que alguien conoce o puede imputar las preferencias de los hogares de tal forma que pueden hacerse comparaciones interpersonales. Véase Sen (1977) para conocer el alcance de los marcos informacionales que hay detrás de especificaciones de este tipo.

Vamos a suponer que la forma anterior se puede resumir en las rentas de los hogares:

$$W = W(Y_1, \dots ,Y_H)$$

Esto impone alguna restricción sobre la forma $w(\cdot)$ de agregación y $U_i(\cdot)$, pero no necesariamente implica que las preferencias sean idénticas, es decir, que $U_i(Y_i) = U(Y_i)$ para todo i, como por ejemplo en Yitzhaki y Slemrod (1991).

Estas funciones de bienestar social representan órdenes de preferencias sociales completos sobre las rentas de los hogares. Sean dos distribuciones de renta $X, Y \in R^H_{++}$, y sea $\succeq_w$ el orden de preferencias social sobre X e Y (de tal forma que $X \succeq_w$,y significa que X es preferido débilmente a Y socialmente); definimos la función de bienestar social $W : R^H_{++} \to R$, que representa dicho orden, esto es:

$$X \succeq_w Y \Leftrightarrow W(X) \geq W(Y)$$

En realidad, existen dos tipos de restricciones implícitas en esa agregación: las que atañen a las preferencias sociales sobre la eficiencia y las que atañen a las preferencias sociales sobre la desigualdad. Para convertirlas en explícitas definamos lo que son índices de desigualdad consistentes con las funciones de bienestar sociales (o con los órdenes que generan). Un índice de desigualdad $I(Y)$ *es consistente con* una función de bienestar social $W(Y)$ si, dadas dos distribuciones X e Y cualesquiera, definidas sobre H hogares, con la misma renta media $\mu(X)=\mu(Y)$, se cumple:

$$W(Y) \geq W(X) \equiv I(Y) \leq I(X)$$

No obstante, este enfoque es muy restrictivo, pues depende de las funciones $W(Y)$ de partida. Lo más aceptable es que, a partir del conjunto de funciones de bienestar social posibles, vayamos introduciendo una serie de restricciones razonables y generales sobre ellas, de tal forma que generamos órdenes incompletos asociados al conjunto de funciones que cumplan esas restricciones. Ésta es la base de los tests clásicos de dominancia estocástica o de dominancia en bienestar social, que tienen en cuenta restricciones de los dos tipos: de eficiencia y de desigualdad. Analicemos cuáles son las restricciones que se consideran en los tests clásicos. Estudiaremos sus implicaciones éticas y cuáles son las herramientas o medidas más adecuadas para su medición.

Nótese que, a este respecto, podemos ampliar, de una forma análoga a la anterior, la noción de consistencia aplicada a los índices de desigualdad. De esta forma, obtenemos órdenes incompletos de desigualdad consistentes con el bienestar social que cumplen unas propiedades.

Por motivos de exposición, podemos dividir el análisis en los siguientes tests clásicos de dominancia, que definen órdenes incompletos que van de un menor a un mayor grado de refinamiento. Diremos que un test de dominancia (u orden incompleto) *es más refinado* que otro cuando permite realizar el mismo número de comparaciones entre distribuciones que el primero y alguna más. En este sentido, siguiendo a Muliere y Scarsini (1989), diremos que el que permite realizar más comparaciones *es coherente* con el primero. Lo más natural es que, para poder realizar más comparaciones entre distribuciones posibles, incorpore supuestos más restrictivos sobre el conjunto de funciones de bienestar social posibles. Otra posibilidad es porque aumentan el dominio de las comparaciones.

1. Test de dominancia estocástica de primer grado (2)

Este primer test considera dos restricciones básicas: el *principio de anonimidad y el principio de Pareto*. El principio de anonimidad establece que el bienestar es independiente de qué hogar reciba qué renta. La función de bienestar social es invariante ante permutaciones de los niveles de renta y, por tanto, es simétrica. En consecuencia, los índices de desigualdad consistentes con esas funciones de bienestar deben ser simétricos. El principio de Pareto establece que, dadas dos distribuciones de renta, si en una de ellas no se observan hogares con renta menor y se observa al menos un hogar con renta mayor, tendrá un nivel de bienestar no inferior a la otra (Pareto, 1896). La función de bienestar social es, por tanto, no decreciente.

El test de dominancia en bienestar de primer grado se enuncia de la siguiente manera: dadas dos distribuciones de renta de H hogares X e Y, la distribución X *domina en primer grado* a Y, esto es que $W(X) \geq W(Y)$ para toda función de bienestar social simétrica y no decreciente, si, y sólo si, la función de distribución de X no va nunca por encima de la de Y, esto es, que $F_X(X_i) \leq F_Y(Y_i)$, para todo $X_i=Y_i$. La función de distribución $F(X_i)$ se define como la proporción de hogares con renta menor o igual a X_i.

Aquí la función de distribución es el instrumento relevante, y el test genera un orden incompleto o parcial, pues en situaciones en que las funciones de distribución se cortan, ambas situaciones son incomparables de acuerdo con este principio de dominancia.

2. Test de dominancia estocástica de segundo grado

El test de primer grado sólo considera una restricción que afecta a la eficiencia, el principio de Pareto. No dice nada sobre la desigualdad: si mantenemos la renta constante, cualquier comparación entre distribuciones diferentes es necesariamente entre distribuciones no comparables bajo el criterio de Pareto.

Además de las dos restricciones anteriores, este segundo test considera una específica que afecta a la desigualdad o a la dispersión, y para aislarla de las restricciones de eficiencia, suponemos un primer caso en que la renta media de la distribución permanece constante. Posteriormente lo relajaremos.

En particular, la restricción específica es el *Principio de transferencias Pigou-Dalton* (Dalton, 1920 y Pigou, 1912) *o desplazamientos que mantienen la media constante (mean-preserving spreads)*: si, dada una distribución X con H hogares, pasamos a otra Y mediante una transferencia de un hogar rico a otro más pobre, sin que se altere su orden entre ellos, el bienestar de Y será no inferior al de X. A este tipo de transferencias se las denomina a veces transferencias progresivas. Ello impone, junto con la simetría, que la función de bienestar social sea S-cóncava (3). Los índices de desigualdad consistentes son todos los S-convexos.

a) *El test de dominancia estocástica de segundo grado con renta media constante*

Se enuncia de la siguiente manera. Dadas dos distribuciones de renta de H hogares X e Y, *con la misma renta media*, la distribución X *domina en segundo grado* a Y [esto es, que $W(X) \geq W(Y)$ para toda función de bienestar social no decreciente y S-cóncava (4)], si, y sólo si, el acumulado de la función de distribución de X no va nunca por arriba del de Y:

$$\sum_0^{x_i} F_x(X_i) \leq \sum_0^{y_j} F_y(Y_j), \forall X_i = Y_j$$

El test se puede establecer de una forma equivalente en términos de la curva de Lorenz (1905), que es, en definitiva, una transformación de la función de distribución: la proporción de renta acumulada que percibe el porcentaje p más pobre de la población. Suponemos en adelante que las distribuciones de renta están ordenadas de menor a mayor (lo cual no afecta dada la anonimidad o simetría). Se define la curva de Lorenz $L_X(p)$ como:

$$L_x(p) = \frac{\sum_0^{x_i}(X_i)}{H\mu(X)}$$

siendo $p = F_X(X_i) = i/H$, y donde $\mu(X)$ es la renta media de la distribución.

El test se enuncia ahora (Atkinson, 1970, y extendido por Dasgupta *et al.*, 1973, y Rothschild y Stiglitz, 1973. Véase también Kolm, 1969) de la manera siguiente: dadas dos distribuciones de renta de H hogares X e Y, con la misma renta media, la distribución X domina en segundo grado a Y, si, y sólo si, la curva de Lorenz de X no va nunca por debajo de la de Y:

$$L_x(p) \geq L_y(p), \forall p \in (0,1)$$

Obtenemos dos transformaciones de la función de distribución como las relevantes. El test vuelve a generar un orden parcial o incompleto, pues situaciones con la misma renta, en que estas funciones transformadas se cortan, son incomparables de acuerdo a este principio de dominancia (5).

Este test de dominancia no supone un refinamiento sobre el test de primer grado, pues hemos restringido el dominio de las comparaciones a situaciones con la renta media constante. Para obtenerlo, consideramos la siguiente generalización a comparaciones con renta media distinta:

b) *Dominancia de segundo grado con renta media variable* (Shorrocks, 1983, y Kakwani, 1984. Véase también Kolm,1969)

En este tercer test se consideran restricciones que afectan a la desigualdad y a la eficiencia simultáneamente. Se consideran *el principio de Pareto* y *el de las transferencias*. El test de dominancia en bienestar de segundo grado se establece de la siguiente manera. Dadas dos distribuciones de renta de H hogares X e Y, la distribución X *domina en segundo grado* a Y —esto es, que $W(X) \geq W(Y)$ para toda función de bienestar social no decreciente y S-cóncava— si, y sólo si,

$$GL_x(p) \geq GL_y(p), \forall p \in (0,1)$$

donde GL es la curva de Lorenz generalizada, definida por Shorrocks (1983) como

$$GL_X(p) = \mu(X) L_X(p).$$

El test vuelve a generar un orden parcial o incompleto, pues cuando estas curvas de Lorenz generalizadas se cortan, las situaciones son incomparables de acuerdo a este principio de dominancia. No obstante, existe una ventaja: el mayor número de restricciones que aparecen en relación al test 1 ó el aumento del dominio de comparaciones con respecto a 2.a), hacen que el número de situaciones incomparables se reduzca y, por tanto, que el número de comparaciones posibles sea mayor. La contrapartida es que el test se realiza para un conjunto menor (o más restrictivo) de funciones de bienestar social en relación con 1. Pero lo relevante es que disponen de justificación ética razonable.

c) *Dominancia de segundo grado con población variable*

Un refinamiento adicional con respecto al test en 2.b) puede conseguirse mediante la ampliación del test de dominancia de cualquier grado a la población variable. Se amplía el dominio de las comparaciones posibles mediante la imposición del axioma de la réplica de la población a las funciones de bienestar social (Dalton, 1920). El bienestar social es invariable ante réplicas exactas de la distribución inicial de la renta. El test exige ahora, en el caso de la dominancia de segundo grado, la dominancia de las curvas de Lorenz generalizadas linealizadas. Con ello se aumenta la comparación no sólo entre los puntos discretos donde está definida la curva de Lorenz, sino a toda interpolación lineal entre cualesquiera dos puntos discretos contiguos de la curva de Lorenz.

d) *Otros test relacionados*

Por el contrario, refinamientos menores que 2.b) pueden obtenerse mediante relajamientos del principio de Pareto por la monotonía a lo largo de la misma escala (*scale- o ray-increasing welfare*): el bienestar aumenta ante cambios proporcionales de la renta. El test exige ahora como condición necesaria y suficiente la dominancia de las curvas de Lorenz y de las rentas medias (Shorrocks, 1983). Esta condición más fuerte supone menos comparaciones posibles. El test puede ponerse en relación con la familia de índices de desigualdad relativos (aquellos que no cambian ante cambios proporcionales en la escala de rentas, pues son homogéneos de grado cero con las rentas), dados los resultados de Blackorby y Donaldson (1978). La condición necesaria y suficiente se establece en términos de la renta media y de toda la clase de índices *S*-convexos y relativos. Ebert (1987) y Dutta y Esteban (1992) caracterizan a la clase de funciones de bienestar que definen este test de dominancia como *S*-cóncava y débilmente homotética.

En la literatura aparecen habitualmente refinamientos aún menores, que atañen análogamente a la monotonía a lo largo de una misma traslación (*translation o incremental-increasing welfare*): el bienestar aumenta ante incrementos constantes en las rentas de los individuos. Otros refinamientos, que suponen versiones «intermedias» de las dos anteriores, también se encuentran en la literatura. Los tests pueden ponerse en relación con los índices de desigualdad absolutos (que no cambian con incrementos absolutos de todas las rentas) y con los índices intermedios, respectivamente. Véanse, para el caso de índices absolutos, Kolm (1976b), Blackorby y Donaldson (1980) Shorrocks (1983), Moyes (1987), y para el caso de índices intermedios, Kolm (1976b), Bossert y Pfingsten (1990), Pfingsten y Siedl (1997), Del Río y Ruiz-Castillo (2000) y Ebert y Moyes (2000).

Volvamos a los tests de dominancia de segundo grado en 2.a), 2.b) y 2.c). Existen distintos caminos para permitir más comparaciones cuando las curvas de Lorenz o las curvas de Lorenz generalizadas se corten. De hecho, es frecuente que se produzcan cortes de las curvas de Lorenz en la práctica. Se trata de introducir restricciones adicionales en las funciones de bienestar del apartado anterior. Existen dos posibilidades que se analizan en los dos próximos apartados. Una, es avanzando en exigir grados mayores de dominancia, y la otra, estudiando el comportamiento de familias o clases de índices de desigualdad, amplias y para las que se conocen bien sus propiedades.

3. Test de dominancia estocástica de tercer grado

Bajo el principio clásico de las transferencias, nada se puede afirmar cuando se produzca una transferencia compuesta consistente en una transferencia progresiva y otra regresiva simultáneamente, aunque sean de igual magnitud y entre individuos separados por la misma renta, y aunque una se produzca en la cola baja y la otra en la cola alta de la distribución. Parece intuitivo que la transferencia del tramo bajo debe pesar más.

El *principio de las transferencias decrecientes* (Kolm, 1976a) refleja esa intuición. Dada una transferencia fija progresiva entre dos individuos separados por la misma renta, ésta tiene un mayor impacto sobre la reducción de la desigualdad, de producirse en un tramo bajo de renta que si se produce en un tramo más alto. Conceptos similares aparecen en la literatura bajo los nombres de *principio de sensibilidad a las transferencias* (Shorrocks y Foster, 1987, y Kakwani, 1980) o *aversión a la desigualdad decreciente* (Davies y Hoy, 1995). Básicamente, este principio es equivalente a que un conjunto de transferencias compuestas, progresivas en el tramo bajo y regresivas en el alto, tales que mantienen la media y la varianza constantes (*mean-variance preserving spreads*), no reducen en su conjunto el bienestar o no aumentan la desigualdad (Menezes *et al.*, 1980).

El efecto sobre la función de bienestar social es que impone que la tercera derivada sea positiva y da pie al test de dominancia en bienestar de tercer grado junto con los axiomas precedentes. Atkinson (1973), Shorrocks y Foster (1987) y Dardanoni y Lambert (1988) establecen las condiciones para la dominancia de tercer grado cuando se produce un único corte de las curvas de Lorenz y las distribuciones tienen la misma renta media.

Dadas dos distribuciones de renta de H hogares X e Y, con la misma media y la curva de Lorenz generalizada de X corta a la de Y una única vez desde arriba y por la izquierda, diremos que la distribución *X domina en tercer grado* a Y [esto es, que $W(X) \geq W(Y)$ para toda función de bienestar social $W = \sum U(Y_i)$ con $U' \geq 0$, $U'' \leq 0$, $U''' \leq 0$], si, y sólo si, la varianza es menor:

$$\sigma^2(X) \leq \sigma^2(Y)$$

donde $\sigma^2(X)$ es la varianza de X.

Existe una generalización para el caso de cruces múltiples entre las curvas de Lorenz y renta media constante (Davies y Hoy, 1994 y 1995), y que en Lambert (1993) se generaliza para renta media variable haciendo uso de las curvas de Lorenz generalizadas. El conjunto de condiciones necesarias y suficientes para la dominancia de tercer grado son que la curva de Lorenz de X empiece cortando a la de Y por arriba (que implica que la renta mínima de X es no menor a la de Y); que la media de X no sea menor a la de Y; y que la varianza de X de todas las sub-poblaciones acumuladas en los puntos en los que las curvas de Lorenz generalizadas se cortan no sean mayores a las de Y.

En definitiva, lo importante de estas proposiciones es que si estas condiciones se satisfacen podremos decir que la distribución X puede obtenerse de la distribución Y mediante un conjunto de transferencias de Pareto, simétricas, un conjunto de transferencias progresivas (*mean-preserving spreads*) y de transferencias compuestas que mantienen la media y la varianza constante, y que en su conjunto no disminuyen el bienestar.

Otros test relacionados

Un refinamiento menor que 3 puede obtenerse mediante el relajamiento del principio de Pareto por la monotonía a lo largo de la misma escala (Shorrocks y Foster, 1987). El test exige ahora como condición necesaria y suficiente, en el caso de un único corte por arriba de las curvas de Lorenz generalizadas, la dominancia en forma del coeficiente de variación y de las rentas medias. De hecho, en el caso 3, aunque es la varianza la variable clave, las comparaciones siempre se hace entre sub-poblaciones con la misma renta media, con lo cual las conclusiones pueden establecerse igualmente en términos del coeficiente de variación, índice ordinalmente equivalente en este caso.

III. FAMILIAS DE ÍNDICES DE DESIGUALDAD CONSISTENTES

Nos centramos en este apartado en tres familias de índices de desigualdad relativos y S-convexos, que son los más utilizados en la literatura. Analizaremos con detalle sus propiedades.

1. La clase de índices de Atkinson. (Atkinson, 1970)

Se obtienen mediante la aplicación de un índice AKS (Atkinson-Kolm-Sen):

$$I_{AKS}(X) = 1 - X^*/\mu(X)$$

donde X^* es la renta equivalente igualitariamente distribuida, tal que:

$$W(X^*e) = W(X)$$

y donde e el vector unidad, a la siguiente función de bienestar social aditivamente separable:

$$W(X) = \sum_i U(X_i)/N$$

donde $U(\cdot)$ es una función cóncava y homotética:

$$U(X_i) = a + b\, X_i^{1-\varepsilon}/1-\varepsilon, \quad \varepsilon > 0 \neq 1$$

$$U(X_i) = Ln(X_i), \quad \varepsilon = 1$$

Con lo cual, el índice de Atkinson vale:

$$A(X,\varepsilon) = 1 - \left[\sum_i \left[\frac{X_i}{\mu(X)}\right]^{1-\varepsilon} \cdot \frac{1}{H}\right]^{\frac{1}{1-\varepsilon}}, \quad \varepsilon > 0 \neq 1$$

$$A(X,1) = 1 - Exp\left[\sum_i Ln\left[\frac{X_i}{\mu(X)}\right] \cdot \frac{1}{H}\right], \quad \varepsilon = 1$$

ε mide el grado de aversión a la desigualdad. La desigualdad aumenta con ε y adopta los siguientes valores extremos:

$A(X, 0) = 0$, es el caso de neutralidad frente a la desigualdad.

$A(X, \infty) = 1 - X_1/\mu(X)$, corresponde al caso maximin rawlsiano (Rawls, 1972).

Son consistentes con (no contradicen) el orden generado por los tests de dominancia de tercer o mayor grado (Thistle, 1994). Son índices relativos y consistentes con el principio de réplica de la población y con el principio de réplica marginal de la población (Salas, 1998): si introducimos un individuo adicional con una renta X^*, el bienestar no varía.

2. Los coeficientes de Gini generalizados. Donaldson y Weymark (1980, 1983) y Yitzhaki (1983)

Se derivan de la siguiente parametrización del índice de Gini estándar (que aparece más abajo) en el caso de la distribución ordenada:

$$G(X, v) = 1 - v(v-1)\sum_i (1-i/H)^{v-2} L(i/H),\ v>1$$

$$G(X, v) = -v/\mu(X)\ Cov\{X, (1-F(X))^{v-1}\},\ v>1$$

cuando $v=2$ coincide con el índice de Gini estándar.

v es una medida del grado de la aversión a la desigualdad. Como en el índice de Atkinson, la desigualdad aumenta con v y adopta los mismos valores extremos que el índice de Atkinson:

$G(X, 1) = 0$, corresponde el caso de neutralidad frente a la desigualdad.

$G(X, \infty) = 1 - X_1/\mu(X)$, corresponde al caso maximin rawlsiano.

La ventaja de estos índices es que tienen propiedades que les relacionan con las curvas de Lorenz y las curvas de concentración. Lo que los hace útiles para analizar la progresividad y los efectos redistributivos verticales de los programas impositivos y de gasto público (véase apartado VI). Por el mismo motivo, son igualmente útiles para descomponer la desigualdad por fuentes de renta. Véanse Kakwani (1977), Fei *et al.* (1978), Shorrocks (1982) y Lerman y Yitzhaki (1985).

Son consistentes con funciones de bienestar social dependientes del rango y cóncavas. Son índices relativos y consistentes con el principio de réplica de la población y son consistentes con los órdenes de dominancia de segundo grado, pues satisfacen el principio de transferencias. Sin embargo, no son consistentes con órdenes de dominancia tercer grado, ya que no satisfacen el principio de las transferencias decrecientes.

Por contra, para $v \leq 2$ los índices son consistentes con la dominancia de tercer grado inversa. El índice de Gini ($v=2$) sólo es consistentes como caso límite, aunque en este punto no hay unanimidad de criterios (Aaberge, 2000). La dominancia estocástica de tercer orden inversa se realiza en términos de la función de los cuantiles, la inversa de la función de distribución (Gastwirth, 1971). La dominancia de primer y segundo orden directa es equivalente a la dominancia inversa análoga. La equivalencia entre la dominancia de tercer o mayor grado directa e inversa no se produce (Muliere y Scarsini, 1989). La dominancia de tercer orden se puede justificar por el principio de sensibilidad a las transferencias posicionales (*principle of positional transfer sensitivity*) (Zoli, 1998), que es análogo al principio de sensibilidad a las transferencias, pero establecido entre individuos separados por el mismo rango (Mehran, 1976).

3. La clase de índices de entropía generalizada. Theil (1967) y Cowell (1977)

Se pueden derivar de la teoría de la información (Cowell, 1977 y 1995) o mediante la imposición de la descomponibilidad aditiva en subgrupos de los índices que satisfacen los axiomas [1] a [5] –Shorrocks (1980 y 1984), Cowell (1980), Cowell y Kuga (1981) y Bourguignon (1979)– y se obtiene la siguiente familia de índices:

$$T(X,c) = \left[\sum_i \left(\frac{X_i}{\mu(X)}\right)^c - 1\right] / H \cdot C \cdot (c-1),\ c \in (-\infty, +\infty)\ y\ c \neq 0,1$$

Como casos particulares se obtienen el Theil 1 y el Theil 0 para $c = 1{,}0$:

$$T(X,1) = \left[\sum_i \left(\frac{X_i}{\mu(X)}\right) Ln\left(\frac{X_i}{\mu(X)}\right)\right] / H,\quad c = 1$$

$$T(X,0) = \left[\sum_i Ln\left(\frac{\mu(X)}{X_i}\right)\right] / H,\quad c = 0$$

donde c es un parámetro que captura la sensibilidad a partes particulares de la distribución. Valores altos y positivos/bajos y negativos de c hacen a los índices más sensibles a cambios en la cola alta/baja de la distribución. Son índices relativos y satisfacen el principio de réplica de la población.

La descomponibilidad aditiva en subgrupos de población es una propiedad interesante. El índice total se descompone en un índice intragrupos (una media ponderada de los índices de cada subgrupo) más un índice intergrupos (obtenido como el índice aplicado a una distribución hipotética en la que cada miembro del subgrupo obtiene la renta media del subgrupo). Los pesos del índice intergrupos sólo suman uno para el caso del Theil 1 y el Theil 0. Especialmente interesante es el caso del Theil 0, para el que los pesos en el índice intragrupos son la población relativa en cada subgrupo. Este último índice también se conoce en la literatura como la desviación media logarítmica (*mean logarithmic deviation*).

Son consistentes con los órdenes de dominancia de segundo grado, dada la renta media constante, y son consistentes con la dominancia de tercer grado para $c \leq 2$. Para el caso, $c = 2$ es ordinalmente equivalente al coeficiente de variación (véase más abajo), que en el límite satisface el principio de la sensibilidad a las transferencias. Los índices de general entropía generalizada son ordinalmente equivalentes a los índices de Atkinson cuando $c = 1 - \varepsilon$ para $-\infty < c < 1$ ó $\varepsilon > 0$. Así, el índice de Theil 0 ($c = 0$) es ordinalmente equivalente al índice de Atkinson ($\varepsilon = 1$). Además, son consistentes con la dominancia de cualquier orden cuando $c \leq 1$.

IV. ÍNDICES DE DESIGUALDAD PARTICULARES

Analicemos las propiedades de algunos índices estadísticos utilizados que individualmente definen órdenes completos y por tanto muy restrictivos.

• *El rango*: se define como la diferencia entre el máximo y el mínimo valor:

$$R = Y_H - Y_1$$

Evidentemente, es susceptible de numerosas críticas. La más evidente es que se olvida de lo que pasa con toda la distribución entre esos valores extremos. Por tanto, sólo satisface débilmente el *principio de transferencias*. Aunque no es un índice relativo, se puede convertir en relativo dividiendo por la media. Satisface el principio de réplica de la población.

• *La desviación media relativa (relative mean deviation)*: se define como:

$$M = \sum |X_i - \mu(X)| / H\mu(X)$$

Que en términos de la curva de Lorenz adopta el valor:

$$M = 2\{F(\mu(X)) - L[F(\mu(X)]\}$$

Adolece de problemas similares al del rango, pues todo se resume en un valor, el valor de la curva de Lorenz en la mediana, olvidando el resto de la distribución. Satisface débilmente, en el límite, el principio de las transferencias. El índice permanece constante ante transferencias progresivas que dejen $F(\mu(X)$ y $L(F(\mu(X))$ invariables. Es decir, aquéllas que se produzcan por arriba o por debajo de la media. Es un índice relativo y satisface el principio de réplica de la población.

• *La varianza*: definida como:

$$V = \sum (X_i - \mu(X))^2 / H$$

Soluciona los problemas anteriores al dar más peso a las transferencias más alejadas de la media. Satisface el principio de las transferencias. Satisface débilmente (en el límite) el principio de las transferencias decrecientes. No obstante, tiene problemas de normalización. No es un índice relativo; al ser un índice homogéneo de grado 2, si multiplicamos todas las rentas por una constante, el índice queda multiplicado por esa constante elevada al cuadrado. Lo cual crea problemas de comparación internacional o entre dos periodos de una economía con crecimiento de rentas reales. Cumple el principio de la réplica de la población.

• *La desviación típica:*

$$\sigma = V^{1/2}$$

Tiene las mismas críticas que la varianza, aunque aliviadas, pues es un índice homogéneo de grado uno solamente. No obstante, esto genera problemas de normalización igualmente.

• *El coeficiente de variación*: se define como la desviación típica entre la media:

$$CV = \sigma(X)/\mu(X)$$

Corrige a la varianza y a la desviación típica de los problemas de normalización. Es un índice relativo (homogéneo de grado cero). Satisface el principio de las transferencias y el principio de la réplica de la población. Por ser ordinalmente equivalente al coeficiente de variación satisface en el límite el principio de las transferencias decrecientes. No satisface ni débilmente dominancias de orden superior a tres.

- *La varianza logarítmica* (*Logarithmic variance*):

$$LV = \sum(\log X_i - \log(\mu(X)))^2 / H$$

Supone una forma alternativa de normalizar la varianza y convertirla en un índice relativo.

Se define como la suma de las desviaciones de los logaritmos con respecto al logaritmo de la media al cuadrado. Puede violar el principio de las transferencias eventualmente. Cumple el principio de la réplica de la población.

- *La varianza de los logaritmos* (*Variance of the logarithms*):

$$VL = \sum(\log X_i - \mu(\log X))^2 / H$$

Supone otra forma alternativa de normalizar la varianza y convertirla en un índice relativo. En este caso, se define como la suma de las desviaciones de los logaritmos con respecto a la media de los logaritmos (es decir, la media geométrica) al cuadrado. Cumple el principio de la réplica de la población.

Dada la introducción del logaritmo, que da más peso proporcional a los números pequeños que a los grandes, *VL* da más peso a las transferencias por debajo de la media de los logaritmos. No obstante, puede violar eventualmente el principio de las transferencias entre transferencias de rentas altas a rentas no tan altas, como resalta Creedy (1977). Véase también Ok y Foster (1999).

- *La desviación típica de los logaritmos* (*Standard deviation of the logarithm*): se define como la raíz cuadrada de *VL*:

$$SL = VL^{1/2}$$

Tiene las mismas características y críticas que *VL*.

- *El índice de Gini (1921)*: se define como

$$G = \sum_i \sum_j |X_i - X_j| / 2H^2\mu(X)$$

que para el caso de la distribución ordenada:

$$G = 1 - 2\sum_i L(i/H)$$

o como:

$$G = 2/\mu(X)\ Cov\{X, F(X)\}$$

Sus propiedades se han analizado en la sección anterior.

También habría que incluir en este apartado el caso de los índices de Theil 0 (conocido también como la desviación media logarítmica-*mean logarithmic deviation*) y el índice de Theil 1 (ambos propuestos en Theil, 1967), cuyas propiedades se vieron en el apartado anterior.

V. HETEROGENEIDAD DE LOS HOGARES: ESCALAS DE EQUIVALENCIAS Y DOMINANCIA SECUENCIAL

Existen dos enfoques para abordar la heterogeneidad de los hogares. El primero es «homogeneizar» las rentas nominales por escalas de equivalencia (Deaton y Muellbauer, 1980) haciendo uso de la función de renta equivalente (Ebert y Moyes, 2000). A efectos prácticos, es especialmente útil la especificación dada en Buhmann *et al*. (1988) y en Coulter, Cowell y Jenkins (1992) que, con un parámetro entre cero y uno, modelizan las economías de escalas de hogares de tamaño distinto.

Una forma alternativa de avanzar, sin hacer uso de las escalas de equivalencias es comparar las distribuciones de rentas monetarias de los hogares adoptando el enfoque propuesto por Atkinson y Bourguignon (1987). Da lugar al conocido test de dominancia secuencial de Lorenz que se basa en los siguientes supuestos:

Supuesto 1:

En primer lugar, hacemos una partición de la población total en subgrupos excluyentes con diferentes necesidades. Denominamos a los subgrupos $i = 1, ..., n$, que van del más necesitado ($i = 1$) al menos necesitado ($i = n$). Suponemos que la utilidad social es la suma de las utilidades individuales de la renta (que se supone creciente y cóncava):

$$W(Y) = \sum U^i(Y^i)$$

donde Y^i es el vector de rentas del subgrupo *i*.

Se suponen diferentes utilidades de las rentas para los diferentes grupos, en orden decreciente, de acuerdo con:

$$U^1(Y) > U^2(Y) > \ldots > U^n(Y)$$

Y la misma utilidad para individuos dentro del mismo subgrupo.

Supuesto 2:

La valoración marginal social de la renta decrece con *i*. Formalmente,

Para cada $i = 1,\ldots, n$, $dU^i/dY_j - dU^{i+1}/dY_j$ *es positivo* y *decreciente con Y.*

Test de dominancia secuencial generalizada de segundo grado (Atkinson y Bourguignon, 1987)

Dada $W_S = \{W / W: R^H{}_{++} \rightarrow R,\ W$ que satisface los supuestos 1 y 2, y $U^i(Y^i)$, cóncava$\}$.

Entonces,

$$\forall X, Y, \in R^H_{++}$$

$$X \geq_{\{WS\}} Y \Leftrightarrow W(X) \geq W(Y),\ \forall W \in W_S \Leftrightarrow$$

$$\Sigma^j_{i=1} GL^i{}_X \geq \Sigma^j_{i=1} GL^i{}_{Y,} \forall j$$

donde $GL^i{}_X$ es la curva de Lorenz generalizada del subgrupo *i*, y $\Sigma^j_{i=1} GL^i{}_X$ es la curva de Lorenz acumulada para los grupos más necesitados $i = 1\ldots, j$. Se empieza por el grupo más necesitado, $i = 1$, y después se va añadiendo paulatinamente el grupo más próximo (es decir el siguiente más necesitado) y así hasta el menos necesitado, $i = n$; la condición necesaria y suficiente para la dominancia social es que las curva de Lorenz generalizada de *X* asociada a cada una de las etapas domine a la de *Y*.

El principal problema es que exige condiciones muy fuertes para la dominancia. La dominancia secuencial de Lorenz se basa en un concepto ordinal de las necesidades, que excluye cualquier cardinalidad cuando los individuos difieren en necesidades. Es un marco tan débil que no permite hacer muchas comparaciones. Un ejemplo clásico lo encontramos en un teorema de imposibilidad de imposición progresiva en este contexto (Moyes y Shorrocks, 1998). Aunque existe igualmente un contra-ejemplo, en el que se encuentran las restricciones sobre la distribución de la renta y el sistema fiscal que garantizan un teorema de existencia (Ok, 1997). Exige condiciones muy restrictivas, por otra parte.

Por el contrario, otros marcos con axiomas más restrictivos (como el que permite comparación a través de homogeneizar a los hogares a través de las escalas de equivalencia) son más útiles, pues permiten aplicar los tests de dominancia propios del caso de los hogares homogéneos. En Blundell y Lewbel (1991) se analizan las restricciones sobre la utilidad de los hogares, con el fin de realizar estimaciones consistentes de las escalas de equivalencia. En Blackorby y Donaldson (1993), se realiza un resumen de la literatura de las escalas de equivalencias y de su potencial en usos aplicados. Por último, Ebert (1997 y 1998) estudia el uso correcto de las escalas de equivalencias en un marco axiomático, con especial atención los pesos demográficos de los hogares.

VI. OTROS CONCEPTOS RELACIONADOS

A modo de conclusión, ofrecemos una lista de trabajos que están relacionados con temas asociados a la desigualdad, que suponen complemento o extensiones naturales de la medición básica:

Pobreza: estudia el número de personas por debajo de un umbral de renta, si el umbral es relativo estaríamos en el caso de pobreza relativa. Alternativamente, estaríamos ante pobreza absoluta. Véanse trabajos relevantes que analizan caracterizaciones robustas de la pobreza en Sen (1976), Foster (1984), Foster *et al*. (1984), Atkinson (1987), Foster y Shorrocks (1988a, b y c) y Jenkins y Lambert (1997, 1998a y b).

Polarización: concierne a la concentración de la distribución de la renta en polos focales, y la desigualdad concierne al hecho de la dispersión con respecto a transferencias que mantienen la media constante. Véanse Wolfson (1994) para el caso de la bipolarización o polarización en dos polos, y Esteban y Ray (1994) y Esteban, Gradín y Ray (1999) para la multi-polarización con grupos exógenos y endógenos, respectivamente.

Convergencia: mide la reducción de desigualdad interregional. Véanse trabajos de Barro y Sala-i-Martin (1990 y 1991), Bishop *et al.* (1992), Esteban (1994) y Salas (1999 y 2001).

Desigualdad intertemporal o dinámica: mide la desigualdad de la renta en el ciclo vital de los individuos, véanse Shorrocks (1978b), Slemrod (1992) y Salas y Rabadán (1998).

Movilidad: como cambio positivo sobre el bienestar social en la distribución de renta o riqueza de partida, medido como cambio en las posiciones iniciales en King (1983). En Esteban (1994) y Salas (1999) se distingue entre desigualdad de medio y largo plazo con este mismo concepto de reordenaciones. Alternativamente, se ha propuesto medirse también como una *ratio* entre la desigualdad dinámica en un periodo y la estática de corto plazo, como en Shorrocks (1978b). Véase también Shorrocks (1978a). Ruiz-Castillo (2000a) aplica y desarrolla la metodología propuesta por Chakravarty, Dutta y Weymark (1985). Véase también el trabajo de Fields y Ok (1996) y su reciente estudio sobre estado de la cuestión en Fields y Ok (2000).

Desigualdad de oportunidades: mide sólo la desigualdad que se debe a la desigualdad de oportunidades, Roemer (1998), Roemer *et alii,* (1999) y Ruiz-Castillo (2000b). No mediría la desigualdad generada por el esfuerzo individual.

Progresividad: desviación de la proporcionalidad de un impuesto: Jackobson (1976), Fellman (1976), Kakwani (1977), Suits (1977), Pfähler (1987), Lambert (1993).

Redistribución vertical: cambio de la desigualdad debida a un impuesto, típicamente se suele descomponer en progresividad, presión fiscal y reordenación utilizando índices basados en la familia de los índice de Gini: Reynolds y Smolenski (1977), Pfähler (1987) y Lerman y Yitzhaki (1995).

Desigualdad horizontal: mide el tratamiento desigual entre individuos iguales o similares: Atkinson (1980), Plotnick (1981), King (1983), Aronson *et al.* (1994), Lambert y Ramos (1997), Perrote *et alii* (2001).

VII. CONCLUSIONES

Brevemente, en este artículo se ha pasado revista al núcleo central del enfoque moderno de la medición de la desigualdad económica. Se ha hecho referencia a los principales trabajos que han hecho posible caminar hacia un análisis robusto de la desigualdad. Análisis que ha sido introducido dentro de un marco de bienestar social. La ventaja de todo ello es que los juicios éticos o normativos se han hecho explícitos. Esto supone un avance considerable sobre el pasado y nos sitúa en condiciones de seguir avanzando hacia el futuro, abordando numerosos temas que, directamente o indirectamente, están relacionados con la desigualdad, y que sucintamente han sido mencionados en este estudio.

NOTAS

(*) Este trabajo se ha beneficiado del Proyecto #PB98-0546-C0202 del Ministerio de Educación, y de los comentarios de Irene Perrote, Isabel Rabadán, Juan Gabriel Rodríguez y Javier Ruiz-Castillo.

(1) Faltarían los precios relativos. Para una justificación véase Roberts (1980), que establece las restricciones adecuadas sobre w(.) y U_i(.), para que la especificación sea independiente de los precios.

(2) Terminología adoptada de la literatura de la dominancia estocástica de la economía de la incertidumbre. La dominancia estocástica de primer y segundo grado fue introducida en economía por ROTHSCHILD Y STIGLITZ (1970). Véase también BAWA (1975). En el estudio del bienestar o de la desigualdad, también se denomina, por analogía, dominancia en bienestar o en desigualdad de primer o de segundo grado, respectivamente. SAPOSNIK (1981 y 1983) analiza extendidamente la dominancia de primer grado.

(3) Una función $W(Y)$ es S-cóncava si $W(AY) \geq W(Y)$, para toda A, matriz biestocástica. Una matriz A es biestocástica si es una matriz cuadrada (HxH), con todos los elementos comprendidos entre 0 y 1, y la suma por filas y por columnas de sus elementos es la unidad. La S-concavidad es una condición más débil que la concavidad y la simetría, y que la cuasi-concavidad y la simetría. Toda función S-cóncava es simétrica.

(4) Adoptamos la convención de proponer las clases de funciones más generales para las cuales se satisfacen los teoremas. Originalmente, y dentro de la literatura de la dominancia estocástica, la clase de funciones considerada es más restrictiva, pues en general es aditiva y simétrica del tipo $W = \sum U(Y_i)$, y en el caso de la dominancia de segundo grado $U(Y_i)$ es no decreciente y cóncava (primera derivada no negativa y segunda derivada no positiva, respectivamente). En general, la aditividad —y, en este caso en particular, la concavidad— no son necesarias; véase en DASGUPTA *et al.* (1973) cómo sólo se requiere S-concavidad.

(5) Otra cuestión son los tests de significantividad estadística de los cortes de las curvas de Lorenz, dada una muestra de partida; véanse, en este sentido, DAVIDSON Y DUCLOS (1997).

BIBLIOGRAFÍA

AABERGE, (2000), «Characterizations of Lorenz curves and income distributions», *Social Choice and Welfare*, 17, 639-653.

AMIEL, Y., y F.A. COWELL (1992), «Measurement of income inequality: Experimental test by questionnaire», *Journal of Public Economics*, 47, 3-26.

— (1999), *Thinking about Inequality*, Cambridge University Press, Cambridge.

ARONSON, J. R.; P. Johnson, y P. Lambert (1994), «Redistributive effect and unequal tax treatment», *Economic Journal*, 104, 262-270.

ARROW, K. J. (1963), *Social Choice and Individual Values*, Wiley, Nueva York.

ATKINSON, A. B. (1970), «On the measurement of inequality», *Journal of Economic Theory*, 2, 244-263.

— (1973), «More on the measurement of inequality», mimeo, University of Essex.

— (1980), «Horizontal equity and the distribution of the tax burden», en AARON y BOSKIN (eds.), *The Economics Of Taxation*, The Brookings Institution.

— (1987), «On the measurement of poverty», *Econometrica*, 55, 759-764.

ATKINSON, A. B., y F. BOURGUIGNON (1987), «Income distributions and difference in needs», en G. R. FEIWEL (ed.), *Arrow and the Foundations of the Theory of Economic Theory*, Macmillan, Nueva York.

BALLANO, C., y J. RUIZ-CASTILLO (1992), «Searching by questionnaire for the meaning of income inequality», *Revista Española de Economía*, 10, 233-259.

BARRO, R., y X. SALA-I-MARTIN (1990), «Economic growth and convergence across the USA», *NBER Working Paper*, 3419.

— (1992), «Convergence», *Journal of Political Economy*, 100, 223-251.

BAWA, V. (1975), «Optimal rules for ordering uncertain prospects», *Journal of Financial Economics*, 2, 95-121.

BISHOP, J. A.; FORMBY, J. P., y P. D. THISTLE (1992), «Convergence of the South and non-South income distributions, 1969-1979», *American Economic Review*, 82, 262-272.

BLACKORBY, C., y D. DONALDSON (1978), «Measures of relative equality and their meaning in terms of social welfare», *Journal of Economic Theory*, 18, 59-80.

— (1980), «A theoretical treatment of indices of absolute inequality», *International Economic Review*, 21, 107-136.

— (1993), «Adult-equivalence scales and the economic implementation of interpersonal comparisons of well-being», *Social Choice and Welfare*, 10, 335-361.

BLUNDELL, R., y LEWBEL (1991), «The information content of equivalence scales», *Journal of Econometrics*, 50, 49-68.

BOSSERT, W., y A. PFINGSTEN (1990), «Intermediate inequality: Concepts, indices and welfare implications», *Mathematical Social Science*, 19, 117-134.

BOURGUIGNON, F. (1979), «Decomposable income inequality measures», *Econometrica*, 47, 901-920.

BUHMANN, B.; RAINWATER, L.; SCHMAUSS, G., y T. SMEEDING (1988), «Equivalence scales, well-being, inequality and poverty: Sensitivity estimates across ten countries using the Luxembourg income study database», *The Review of Income and Wealth*, 34, 115-142.

CHAKRAVARTY, S.; B. DUTTA, y J. WEYMARK (1985), «Ethical indices of income mobility», *Social Choice and Welfare*, 2, 1-21.

COULTER, F. A.; COWELL, F. A., y S. P. JENKINS (1992), «Difference in needs and assessment of income distributions», *Bulletin of Economic Research*, 44, 77,124.

COWELL, F. A. (1977), *Measuring Inequality*, primera edición, Phillip Allan, Oxford.

— (1980), «On the structure of additive inequality measures», *Review of Economic Studies*, 47, 521-531.

— (1995), *Measuring Inequality*, segunda edición, Harvester Wheatsheaf, Hemel Hempstead.

COWELL, F. A., y K. Kuga (1981), «Additivity and the entropy concept: An axiomatic approach to inequality measurement», *Journal of Economic Theory*, 25, 131-143.

CREEDY, J. (1977), «The principle of transfers and the variance of logarithms», *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 39, 153-158.

DALTON, H. (1920), «Measurement of the inequality of incomes», *The Economic Journal*, 30, 348-361.

DARDANONI, V., y P. J. LAMBERT (1988), «Welfare ranking of income distribution: A role for the variance and some insights for tax reform, *Social Choice and Welfare*, 5, 1-17.

DASGUPTA, P. S.; A. M. SEN, y D. A. STARRET (1973), «Notes on the measurement of inequality», *Journal of Economic Theory*, 6, 180-187.

DAVIDSON, R., y J. Y. DUCLOS (1997), «Statistical inference for the measurement of the incidence of tax and transfers», *Econometrica*, 65, 1453-1466.

DAVIES, J. B., y M. HOY (1994), «The normative significance using third-degree stochastic dominance in comparing income distributions», *Journal of Economic Theory*, 64, 520-530.

— (1995), «Making inequality comparisons when Lorenz curves intersect», *American Economic Review*, 85, 980-986.

DEATON, A., y J. MUELLBAUER (1980), *Economics and Consumer Behavior*, Cambridge University Press, Cambridge.

DEL RÍO, C., y J. RUIZ-CASTILLO (2000), «Intermediate inequality and welfare», *Social Choice and Welfare*, 17, 223-239.

DONALDSON, D., y J. A. WEYMARK (1980), «A single parameter generalization of the gini index and inequality», *Journal of Economic Theory*, 22, 67-86.

— (1983), «Ethical flexible indices for income distributions in the continuum», *Journal of Economic Theory*, 29, 353-358.

DUTTA, B., y J. M. ESTEBAN, (1992), «Social welfare and equality», *Social Choice and Welfare*, 9, 267-276.

EBERT, U. (1987), «Size and distribution of incomes as determinants of social welfare», *Journal of Economic Theory*, 41, 23-33.

— (1997), «Social welfare when needs differ: An axiomatic approach», *Economica*, 64, 233-244.

— (1998), «Using equivalence scales of equivalence adults to rank income distributions when households types are different», *Social Choice and Welfare*, 16, 233-258.

EBERT, U., y P. MOYES (2000), «Consistent income tax structures», *Journal of Economic Theory*, 90, 116-150.

ESTEBAN, J. M. (1994), «La desigualdad interregional en Europa y en España: descripción y análisis», en ESTEBAN, J., y X. VIVES (eds.), *Convergencia y crecimiento regional en España y en Europa*, Instituto de Análisis Económico, Bellaterra.

ESTEBAN, J. M., y D. RAY (1994), «On the measurement of polarization», *Econometrica*, 62, 819-851.

ESTEBAN, J. M.; C. GRADÍN, y D. RAY (1999), «A new approach to polarization and conflict: Extensions of a measure of polarization, with an application to the income distribution of five OECD countries», *Papeles de Trabajo Instituto de Estudios Económicos de Galicia,* 24/1999.

FEI, J. C. H.; RANIS, G., y S. W. Y. KUO (1978), «Growth and the family distribution of income by factor components», *Quarterly Journal of Economics*, 92, 17-53.

FELLMAN, J. (1976), «The effect transformations on Lorenz curves», *Econometrica*, 44, 823-824.

FIELDS, G., y E. OK (1996), «The meaning and measurement of income mobility», *Journal of Economic Theory,* 71, 349-377.

— (2000), «The measurement of income mobility: An introduction to the literature», en J. SIBLER, *Handbook of Income Inequality Measurement*, Kluwer Academic Press, Dordrecht.

FOSTER, J. E. (1984), «On economic poverty: a survey of aggregate measures», *Advances in Econometrics*, 3, 215-251.

FOSTER, J. E.; J. GREER, y E. TORBECKE (1984), «A class of decomposable poverty measures», *Econometrica*, 52, 761-766.

FOSTER, J. E., y A. F. SHORROCKS (1988a), «Poverty orderings», *Econometrica*, 56, 173-178.

— (1988b), «Poverty orderings and welfare dominance», *Social Choice and Welfare*, 5, 179-198.

— (1988c), «Inequality and poverty orderings», *European Economic Review*, 32, 654-662.

GASTWIRTH, J. L. (1971), «A general definition of Lorenz curves», *Econometrica*, 39, 1037-1039.

GINI, C. (1921), «Measurement of inequality of incomes», *The Economic Journal*, 31, 124-126.

JACKOBSON, U. (1976), «On the measurement of the degree of progression», *Journal of Public Economics*, 5, 161-168.

JENKINS, S. P., y P. J. LAMBERT (1997), «Three 'I's of poverty curves, with an analysis of UK poverty trends», *Oxford Economics Papers*, 49, 317-327.

— (1998a), «Ranking poverty gap distributions: Further TIPs for poverty analysis», *Research on Economic Inequality*, 8, 31-38.

— (1998b), «Three 'I's of poverty curves and poverty dominance: TIPs for poverty analysis», *Research on Economic Inequality*, 8, 39-56.

KAKWANI, N. C. (1977), «Application of Lorenz curves in economic analysis», *Econometrica*, 45, 719-727.

— (1980), «On a class of poverty measures», *Econometrica*, 48, 437-446.

— (1984), «Welfare rankings and income distributions», en R. BASSMAN, y G. RHODES (eds.), *Advances in Econometrics*, 3, 191-213, JAI Press, Greenwich.

KING, M. (1983), «An index of inequality: with applications to horizontal equity and social mobility», *Econometrica*, 51, 99-115.

KOLM, S. C. (1969), «The optimal production of social justice», in J. MARGOLIS, y H. GUITTON (eds.), *Public Economics*, Macmillan, Londres.

— (1976a), «Unequal inequality: I», *Journal of Economic Theory*, 12, 416-442.

— (1976b), «Unequal inequality: II», *Journal of Economic Theory*, 13, 88-111.

LAMBERT, P. J. (1993), *The Distribution and Redistribution of Income*, segunda edición, Manchester University Press, Manchester.

LAMBERT, P. J., y RAMOS, X. (1997), «Vertical redistribution and vertical inequity», *International Tax and Public Finance*, 4, 25-37.

LERMAN, R. I., y S. YITZHAKI (1985), «Income inequality effects by income source: A new approach and applications to the United States, *The Review of Economics and Statistics*, 67, 151-156.

— (1995), «Changing ranks and the inequality impacts of taxes and transfers», *National Tax Journal*, 48, 45-59.

LORENZ, M. O. (1905), «Methods of measuring concentration and wealth», *Journal of The American Statistical Association*, 9, 209-219.

MEHRAM, F. (1976), «Linear measures and income inequality», *Econometrica*, 44, 805-809.

MENEZES, C.; GEISS, C., y J. TRESSLER (1980), «Increasing downside risk», *American Economic Review*, 70, 921-931.

MOYES, P. (1987), «A new concept of Lorenz domination», *Economic Letters*, 23, 203-207.

MOYES, P., y A. F. SHORROCKS (1998), «The impossibility of a progressive tax system», *Journal of Public Economics*, 69, 49-65.

MULIERE, P., y M. SCARSINI (1989), «A note on stochastic dominance and inequality measures», *Journal of Economic Theory*, 49, 314-323.

OK, E. A. (1997), «A note on the existence of progressive tax system», *Social Choice and Welfare*, 14, 527-543.

OK, E. A., y J. Foster (1999), «Lorenz dominance and the variance of logarithms», *Econometrica*, 67, 901-970.

PARETO, V. (1896), «Ecrits sur la courbe de la répartition de la richesse», en *Oeuvres complètes de Vilfredo Pareto*, Libraire Droz, Ginebra, 1965.

PERROTE, I.; RODRÍGUEZ, J. G., y R. SALAS (2001), «A non-parametric decomposition of redistribution into vertical and horizontal components», *Documento de Trabajo 2001-7*, Universidad Complutense de Madrid.

PFÄHLER, W. (1987), «Redistributive effects of tax progressivity: Evaluating a general class of aggregate measures», *Public Finance/Finance Publiques*, 37, 1-31.

PFINGSTEN, A., y SIEDL (1997), «Ray invariant inequality measures», en S. ZANDVAKILI, y D. SLOTJE (eds.), *Research on Taxation and Inequality*, 107-129, JAI Press.

PIGOU, A. C. (1912), *Wealth and Welfare*, Macmillan, Londres.

PLOTNICK, R. (1981), «A measure of horizontal inequity», *Review of Economics and Statistics*, 63, 283-288.

RAWLS, J. (1972), *A Theory of Justice*, Oxford University Press, Oxford.

REYNOLDS, M., y E. SMOLENSKI (1977), *Public Expenditure, Taxes and the Distribution of Income: The United States, 1950, 1961, 1970*, Academic Press, Nueva York.

ROBERTS, K. (1980), «Price-independent welfare prescriptions», *Journal of Public Economics*, 52, 177-195.

ROEMER, J. E. (1998), *Equality of Opportunity*, Harvard University Press, Cambridge, M. A.

ROEMER, J. E. *et al.* (1999), «To what extent do fiscal regimes equalize opportunities for income acquisitions among citizens?», *EPRU Working Paper 2000-10*, University of Copenhagen.

ROTHSCHILD, M., y J. E. STIGLITZ (1970), «Increasing risk I: A definition», *Journal of Economic Theory*, 2, 225-243.

— (1973), «Some further results on the measurement of inequality», *Journal of Economic Theory*, 6, 188-203.

RUIZ-CASTILLO, J. (2000a), «The measurement of structural and exchange income mobility», Universidad Carlos III de Madrid, *Working Paper*, 00-56, Economic Series.

— (2000b) «The measurement of inequality of opportunities», Universidad Carlos III de Madrid, *Working Paper*, 00-57, Economic Series.

SALAS, R. (1998), «Welfare-consistent inequality indices in changing populations: The marginal population replication axiom. A note», *Journal of Public Economics*, 67, 145-150.

— (1999), «Convergencia, movilidad y redistribución interterritorial en España: 1981-1996», *PAPELES DE ECONOMÍA ESPAÑOLA*, 80, 19-28.

— (2001), «Multilevel interterritorial convergence and additive multidimensional inequality decomposition», próximamente en *Social Choice and Welfare.*

SALAS, R., e I. RABADÁN (1998), «Cyclical and vertical intertemporal inequality, redistribution and income smoothing: A social welfare approach», *Review of Income and Wealth*, 44, 63-79.

SAPOSNIK, R. (1981), «Rank dominance in income distribution», *Public Choice*, 36, 147-151.

— (1983), «On evaluating income distributions: Rank dominance», *Public Choice*, 40, 329-336.

SEN, A. (1973), *On economic inequality*, Clarendon Press, Oxford.

— (1976), «Poverty: an ordinal approach to measurement», *Econometrica*, 44, 219-231.

— (1977), «On weights and measures: Informational constraints in social welfare analysis», *Econometrica*, 45, 1539-1572.

SHORROCKS, A. F. (1978a), «The measurement of mobility», *Econometrica*, 46, 1013-1024.

— (1978b), «Income inequality and income mobility», *Journal of Economic Theory*, 10, 376-393.

— (1980), «The class of additive decomposable inequality measures», *Econometrica*, 48, 613-625.

— (1982), «Inequality decomposition by factor components», *Econometrica*, 50, 193-211.

— (1983), «Ranking income distribution», *Economica*, 50, 3-17.

— (1984), «Inequality decomposition by population subgroups», *Econometrica*, 52, 1369-1385.

SHORROCKS, A. F., y J. E. FOSTER (1987), «Transfer-sensitive inequality measures», *Review of Economic Studies*, 54, 485-498.

SLEMROD, J. (1992), «Taxation and inequality: A time-exposure perspective», *NBER Working Paper*, 3999.

SUITS, D. B. (1977), «Measurement of tax progressivity», *American Economic Review*, 67, 747-752.

THEIL, H. (1967), *Economics and Information Theory*, North Holland, Amsterdam.

THISTLE, P. D. (1994), «On Atkinson's index and consensus in rankings of income distributions», en W. Eichhorn, *Models and Measurement of Welfare and Inequality*, Springer Verlag, Heidelberg.

WOLFSON, M. C. (1994), «When inequality diverge», *American Economic Review*, 84, 353-358.

YITZHAKI, S. (1983), «On an extension of the Gini inequality index», *International Economic Review*, 24, 617-628.

YITZHAKI, S., y J. SLEMROD (1991), «Welfare dominance: An application to commodity taxation», *American Economic Review*, 81, 480-496.

ZOLI, C. (1998), «Intersecting generalized Lorenz curves and the Gini index», *Social Choice and Welfare,* 16, 183-196.

Resumen

Se presenta una panorámica del estudio moderno de la desigualdad, que sea de utilidad para el investigador. El estudio moderno se entronca en la economía del bienestar y se presentan ejercicios o tests robustos de variación de la desigualdad o del bienestar con respecto a un conjunto de axiomas, que se consideran habitualmente como razonables. Este conjunto de axiomas representa los valores o juicios éticos que están detrás del estudio de la desigualdad. Finalmente, se proporcionan referencias claves para estudiar conceptos relacionados con la desigualdad, pero no idénticos, como son la pobreza, la polarización, la movilidad, la redistribución, etcétera.

Palabras clave: bienestar, desigualdad económica, índices de desigualdad.

Abstract

We present an overview of the modern study of inequality, which may prove of use to the researcher. Modern study is linked to the welfare economy and we put forward robust exercises and tests of variation in inequality or welfare in respect of a set of axioms that are usually considered as reasonable. This set of axioms represent the ethical values or judgments that lie behind the study of inequality. Lastly, we provide key references for studying concepts related but not identical to inequality, as poverty, polarisation, mobility, redistribution, and so on and so forth.

Key words: welfare, economic inequality, indexes of inequality.

JEL classificatión: D63, D31, H23