Cambio técnico y la función de producción agregada (*)

Robert M. Solow (**)

En esta época de estudios econométricos racionalmente diseñados y grandes tablas *input-output*, se necesita algo más que la "complaciente suspensión de la incredulidad" habitual para hablar seriamente de la función agregada de producción. Sin embargo, la función agregada de producción es un concepto sólo un poco menos legítimo que, digamos, la función agregada de consumo, y, en ciertos macro-modelos a largo plazo, es casi tan indispensable como lo es ésta última para el corto plazo. Mientras insistamos en practicar la macroeconomía, seguiremos necesitando relaciones agregadas.

Incluso en ese caso, estaría poco justificado volver a este tema tan pasado de moda si no tuviera alguna novedad que sugerir. La nueva idea que quiero describir es una forma elemental de separar las variaciones del producto per cápita que son consecuencia del cambio técnico de aquellas que responden a cambios en la disponibilidad del capital per cápita. Naturalmente, cada incorporación adicional de información tiene su precio. En este caso, el precio consiste en una nueva serie temporal requerida, la participación del trabajo o capital en la renta total, y un nuevo supuesto, que se retribuye a los factores según sus productos marginales. Dado que el primero es probablemente más respetable que los demás datos que voy a utilizar, y dado que el último es un supuesto que se suele realizar, es posible que el precio no sea excesivamente alto.

Antes de proseguir, permítanme aclarar que no voy a intentar justificar lo que sigue con la ayuda de fantásticos teoremas sobre la agregación y los números índices (1). Este tipo de economía agregada puede interesar o no. Personalmente, pertenezco a ambas escuelas. Si interesa, creo que podemos extraer algunas conclusiones rudimentarias pero útiles, partiendo de los resultados.

BASE TEÓRICA

Comenzaré explicando mi concepto matemático para, a continuación, hacer una exposición esquemática. En este caso, las matemáticas parecen ser más sencillas. Si Q representa el producto y K y L representan los ingresos de capital y trabajo en unidades "físicas", entonces la función agregada de producción puede expresarse así:

$$Q = F(K, L; t) \qquad [1]$$

La variable t del tiempo aparece en F para introducir el cambio técnico. Se verá que utilizo la expresión "cambio técnico" como expresión abreviada de *cualquier tipo de desplazamiento* de la función de producción. Por ello, aparecerán como "cambio técnico" los retrasos, las aceleraciones, las mejoras en la educación de la fuerza laboral y otras muchas cosas.

Es conveniente comenzar con el caso especial del cambio técnico *neutral*. Definimos como neutrales los desplazamientos de la función de producción si no afectan a las tasas marginales de sustitución, y simplemente aumentan o disminuyen el producto que se puede obtener a partir de unos insumos dados. En este caso, la función de producción adopta la forma especial siguiente:

$$Q = A(t) f(K, L) \qquad [1a]$$

y el factor multiplicador $A(t)$ mide el efecto acumulado de los desplazamientos a lo largo del tiempo. Si diferenciamos completamente [1a] con respecto al tiempo, y dividimos por Q, obtenemos:

$$\frac{\dot{Q}}{Q} = \frac{\dot{A}}{A} + A\frac{\partial f}{\partial K}\frac{\dot{K}}{Q} + A\frac{\partial f}{\partial L}\frac{\dot{L}}{Q}$$

donde los puntos sobre las letras indican derivadas temporales. Definimos ahora $w_k = \frac{\partial Q}{\partial K}\frac{K}{Q}$ y $w_L = \frac{\partial Q}{\partial L}\frac{L}{Q}$ las participaciones relativas del capital y trabajo, y las sustituimos en la ecuación anterior (obsérvese que $\partial Q / \partial K = A \ \partial f / \partial K$, etc.), y de ello, resulta:

$$\frac{\dot{Q}}{Q} = \frac{\dot{A}}{A} + w_K\frac{\dot{K}}{K} + w_L\frac{\dot{L}}{L} \qquad [2]$$

A partir de las series temporales $\dot{Q}/Q$, w_k, $\dot{K}/K$, w_L y $\dot{L}/L$ o de sus análogas discretas anuales, podemos calcular $\dot{A}/A$ y, de ahí, la propia $A(t)$. En realidad, aquí está ocurriendo algo bastante curioso. Hasta ahora, no hemos dicho nada sobre los rendimientos de escala. Pero si todos los insumos de factores se clasifican como K o como L, entonces los gráficos disponibles siempre mostrarán w_k y w_L cuya suma es igual a uno. Dado que hemos supuesto que se retribuye a los factores su producto marginal, ello equivale a asumir la hipótesis del teorema de Euler. Tal como va el cálculo, deberíamos asumir también la conclusión de que F es homogéneo de grado uno. Ello implica la ventaja de hacer que todo resulte claro en términos de magnitudes intensivas. Pongamos que $Q/L = q$, $K/L = k$, $w_L = 1 - w_K$. Tengamos en cuenta que $\dot{q}/q = \dot{Q}/Q - \dot{L}/L$, etc. Con ello, [2] pasa a ser:

$$\frac{\dot{q}}{q} = \frac{\dot{A}}{A} + w_k\frac{\dot{k}}{k} \qquad [2a]$$

Todo lo que necesitamos ahora para desglosar el índice $A(t)$ del cambio técnico son las series del producto por hora, del capital por hora/hombre, y la participación del capital.

Hasta ahora, he dado por supuesto que el cambio técnico era neutral. Pero si volvemos a [1] y seguimos el mismo razonamiento, llegamos a algo muy parecido a [2a], a saber:

$$\frac{\dot{q}}{q} = \frac{1}{F}\frac{\partial F}{\partial t} + w_k\frac{\dot{k}}{k} \qquad [2b]$$

Integrando una ecuación diferencial parcial, podemos mostrar que si $\dot{F}/F$ es independiente de K y de L (de hecho bajo rendimientos constantes de escala sólo importa K/L), entonces [1] adopta la forma especial [1a] y los desplazamientos en la función de producción son neutrales. Si, además, $\dot{F}/F$ es constante en el tiempo, por ejemplo igual a a, entonces $A(t) = e^{at}$ o, en aproximación discreta, $A(t) = (1 + a)^t$.

Podemos ahora establecer gráficamente con facilidad el caso de los desplazamientos neutrales y de los rendimientos constantes de escala. La función de producción está representada en su totalidad mediante un gráfico de q respecto a k (de manera análoga al hecho de que si conocemos la isocuanta de unidad–producto, conocemos el mapa completo). El problema está en que esta función se desplaza en el tiempo, de manera que si observamos los puntos en el plano (q, k), sus cambios se componen de movimientos a lo largo de la curva y desplazamientos de la misma. En el gráfico 1, por ejemplo, cada ordenada de la curva $t = 1$ se ha multiplicado por el mismo factor, para producir un desplazamiento neutral de la función de producción para el período 2. El problema radica en calcular este desplazamiento a partir de los puntos P_1 y P_2 que conocemos. Obviamente, sería engañoso ajustar una curva a unos puntos determinados en bruto, como P_1, P_2 y otros. Pero si el factor de desplazamiento de cada punto se puede calcular, los puntos a determinar pueden modificarse por un cambio técnico y entonces se puede hallar la función de producción (2).

Ante pequeños cambios, lo más natural es aproximar la curva del período 2 por la tangente a P_2 (o la curva del período 1 por su tangente a P_1). Con ello conseguimos un punto P_{12}, corregido por aproximación, así como una estimación para $\Delta A/A$, a saber, $\overline{P_{12}P_1}/q_1$. Pero $k_1 P_{12} = q_2 - \partial q/\partial k \, \Delta k$, por lo que $\overline{P_{12}P_1} = q_2 - q_1 - \partial q / \partial k \, \Delta k = \Delta q - \partial q / \partial k \, \Delta k$ y $\Delta A / A = \overline{P_{12}P_1} / q_1 = \Delta q / q - \partial q / \partial k \, (k/q) \, \Delta k / k = \Delta q / q - w_k \, \Delta k / k$ que es exactamente el contenido de [2a]. El caso no necesariamente neutral es un poco más complicado, pero es similar en lo esencial.

UNA APLICACIÓN A LOS EE.UU.: 1909–1949

Para separar los desplazamientos de la función agregada de producción de los movimientos a lo largo de ella, utilizando [2a] o [2b], se necesitan tres series temporales: producto por unidad de trabajo, capital por unidad de trabajo y participación del capital. En el cuadro núm. 1 se ofrecen algunas de las cifras aproximadas disponibles, junto con los cálculos oportunos.

La medida conceptualmente más clara del producto agregado puede ser el producto nacional neto

GRÁFICO 1

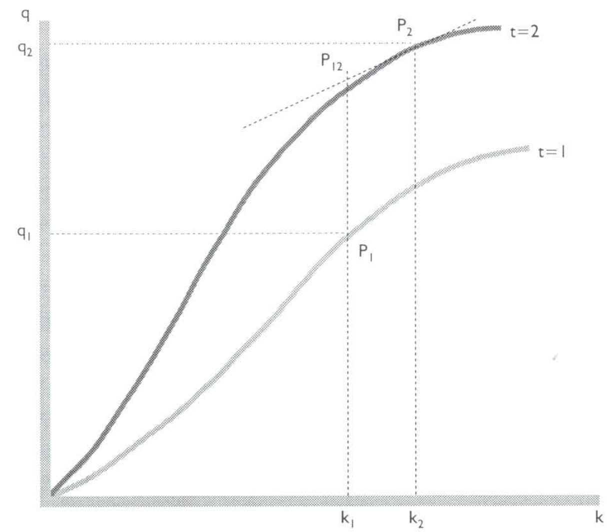
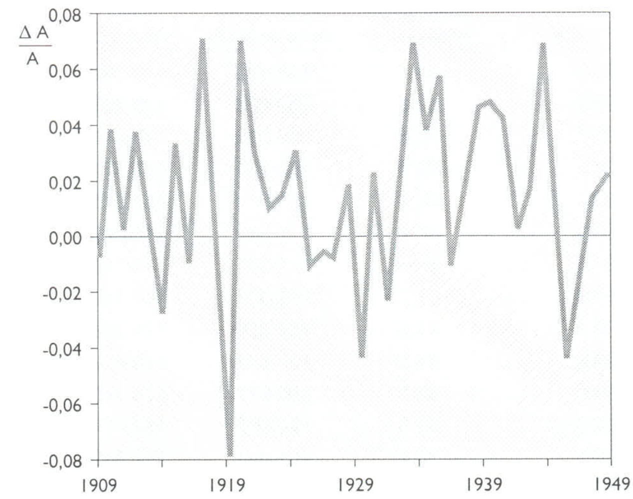


GRÁFICO 2



real (PNN). Pero es difícil conseguir la larga serie del PNN, de modo que he utilizado el PNB (Producto Nacional Bruto). La única diferencia estriba en que la participación del capital debe incluir la depreciación. Fue posible limitar el experimento a la actividad económica privada no agrícola. Ello supone una ventaja (a) porque evita el problema de medir el producto del sector público, y (b) porque eliminar la agricultura representa, al menos, un paso hacia la homogeneidad. Así, mi *q* es una serie temporal del PNB privado real no agrícola por hora–hombre, el valioso trabajo de Kendrick.

La serie temporal del capital es la que volvería loco a un purista. A efectos de lo que nos ocupa, "capital" incluye la tierra, los yacimientos minerales, etc. Naturalmente, he utilizado los cálculos de Goldsmith (que elimina los bienes duraderos estatales, agrícolas y de consumo). Idealmente, lo que nos gustaría medir es el flujo anual de servicios de capital. En su lugar, hemos de contentarnos con una estimación menos utópica de las existencias de bienes de capital. A este respecto, surgen todo tipo de problemas conceptuales. Simplemente, a modo de ejemplo, si las existencias de capital consistieran en un millón de máquinas idénticas y si cada una de ellas, a medida que se desgastase, fuera sustituida por otra máquina más duradera y con la misma capacidad anual, las existencias de capital, tal como las hemos medido, seguramente aumentarían. No obstante, el flujo máximo de servicios de capital sería constante. No se puede hacer nada a este último respecto, pero es preciso realizar algo con respecto a la capacidad ociosa. Lo que corresponde a una función de producción es el capital en uso, no el capital instalado. Ante la falta de una medida fiable anual de la utilización del capital, me he limitado a reducir las cifras de Goldsmith por la fracción de la fuerza laboral desempleada en cada año, y ello dando por sentado que trabajo y capital siempre padecen desempleo en el mismo porcentaje. No hay duda de que esto es incorrecto, pero probablemente se aproxima más a la realidad que si no hacemos ninguna corrección (3).

La serie de la participación del capital es otra mezcolanza formada con elementos de diversas fuentes y supuestos *ad hoc* (por ejemplo, la de Gale Johnson, de que cerca del 35 por 100 de la renta empresarial no agrícola está constituida por rentas de la propiedad). Una vez completados estos cálculos, supe que Edward Budd, de la Universidad de Yale, había realizado un cuidadoso estudio a largo plazo de las cuotas de los factores que se publicará en breve. No parece probable que la introducción de cambios menores en este ingrediente alteren en gran medida los resultados finales, pero no me cabe duda de que el refinamiento de éste y de la serie temporal del capital arrojarían unos resultados más exactos.

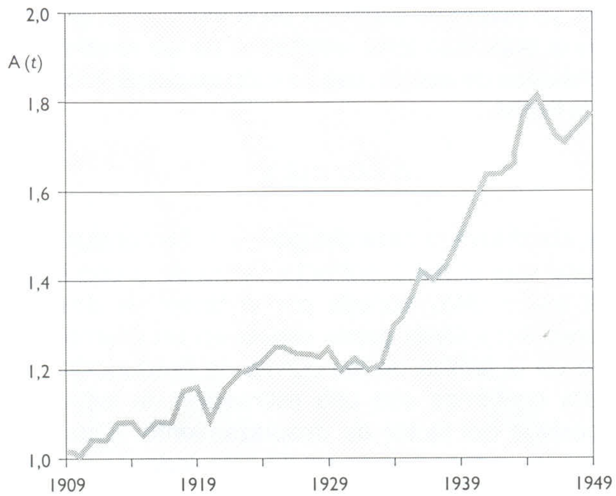
En cualquier caso, en [2a] o en [2b] podemos reemplazar las derivadas temporales por cambios anuales, y calcular $\Delta q/q - w_k \Delta k/k$. El resultado es una estimación de $\Delta F/F$ o $\Delta A/A$, dependiendo de si estos desplazamientos relativos parecen ser neutrales o no. Este cálculo se realiza en el cuadro núm. 1 y aparece reflejado en el gráfico 2. A partir de ahí, estableciendo A (1909) = 1 de forma arbitraria y aprovechando el hecho de que $A(t+1) = A(t)(1 + \Delta A(t)/A(t))$,

CUADRO NÚM. 1
DATOS PARA EL CÁLCULO DE *A(t)*

AÑO	Porcentaje de fuerza laboral empleada (1)	Existencias de capital (en millones de $) (2)	Col. 1 x Col. 2 (3)	Participación del capital en la renta (4)	PNB privado no agrícola por hombre–hora (5)	Capital empleado por hombre–hora (6)	Δ A/A (7)	A(t) (8)
1909	91,1	146.142	133.135	0,335	0,623	2,06	–0,017	1,000
1910	92,8	150.038	139.235	0,330	0,616	2,10	0,039	0,983
1911	90,6	156.335	141.640	0,335	0,647	2,17	0,002	1,021
1912	93,0	159.971	148.773	0,330	0,652	2,21	0,040	1,023
1913	91,8	164.504	151.015	0,334	0,680	2,23	0,007	1,064
1914	83,6	171.513	143.385	0,325	0,682	2,20	–0,028	1,071
1915	84,5	175.371	148.188	0,344	0,669	2,26	0,034	1,041
1916	93,7	178.351	167.115	0,358	0,700	2,34	–0,010	1,076
1917	94,0	182.263	171.327	0,370	0,679	2,21	0,072	1,065
1918	94,5	186.679	176.412	0,342	0,729	2,22	0,013	1,142
1919	93,1	189.977	176.869	0,354	0,767	2,47	–0,076	1,157
1920	92,8	194.802	180.776	0,319	0,721	2,58	0,072	1,069
1921	76,9	201.491	154.947	0,369	0,770	2,55	0,032	1,146
1922	81,7	204.324	166.933	0,339	0,788	2,49	0,011	1,183
1923	92,1	209.964	193.377	0,337	0,809	2,61	0,016	1,196
1924	88,0	222.113	195.460	0,330	0,836	2,74	0,032	1,215
1925	91,1	231.772	211.198	0,336	0,872	2,81	–0,010	1,254
1926	92,5	244.611	226.266	0,327	0,869	2,87	–0,005	1,241
1927	90,0	259.142	233.228	0,323	0,871	2,93	–0,007	1,235
1928	90,0	271.089	243.980	0,338	0,874	3,02	0,020	1,226
1929	92,5	279.691	258.714	0,332	0,895	3,06	–0,043	1,251
1930	88,1	289.291	254.865	0,347	0,880	3,30	0,024	1,197
1931	78,2	289.056	226.042	0,325	0,904	3,33	0,023	1,226
1932	67,9	282.731	191.974	0,397	0,879	3,28	0,011	1,198
1933	66,5	270.676	180.000	0,362	0,869	3,10	0,072	1,211
1934	70,9	263.370	186.020	0,355	0,921	3,00	0,039	1,298
1935	73,0	257.810	188.201	0,351	0,943	2,87	0,059	1,349
1936	77,3	254.875	197.018	0,357	0,982	2,72	–0,010	1,429
1937	81,0	257.076	208.232	0,340	0,971	2,71	0,021	1,415
1938	74,7	259.789	194.062	0,331	1,000	2,78	0,048	1,445
1939	77,2	257.314	198.646	0,347	1,034	2,66	0,050	1,514
1940	80,6	258.048	207.987	0,357	1,082	2,63	0,044	1,590
1941	86,8	262.940	228.232	0,377	1,112	2,58	0,003	1,660
1942	93,6	270.063	252.779	0,356	1,136	2,64	0,016	1,665
1943	97,4	269.761	262.747	0,342	1,180	2,62	0,071	1,692
1944	98,4	265.483	261.235	0,332	1,265	2,63	0,021	1,812
1945	96,5	261.472	253.320	0,314	1,296	2,66	–0,044	1,850
1946	94,8	258.051	244.632	0,312	1,215	2,50	–0,017	1,769
1947	95,4	268.845	256.478	0,327	1,194	2,50	0,016	1,739
1948	95,7	275.476	264.588	0,332	1,221	2,55	0,024	1,767
1949	93,0	289.360	269.105	0,326	1,275	2,70	—	1,809

Notas y fuentes:
(1) Porcentaje de fuerza laboral empleada 1909–26, de Douglas, *Real Wages in the United States* (Boston and New York, 1930), 460. 1929–49, calculado a partir de *The Economic Almanac*, 1953–54 (New York, 1953), 426–28.
(2) Existencias de capital, de Goldsmith, *A Study of Saving in the United States*, vol. 3, (Princeton, 1956), 20–21, suma de columnas 5, 6, 7, 9, 12, 17, 22, 23 y 24.
(3) (1) x (2).
(4) Participación del capital en la renta. Recopilado de *The Economic Almanac*, 504–505; y Jesse Burkhead, "Changes in the Functional Distribution of Income", *Journal of the American Statistical Association*, vol. 48 (junio 1953), 192, 219. Cálculos sobre depreciación de Goldsmith, 427.
(5) PNB privado no agrícola por hombre–hora, en dólares de 1939. Datos de Kendrick, reproducidos en *The Economic Almanac*, 490.
(6) Capital empleado por hombre–hora. Columna (3) dividida por la serie hombre–hora de Kendrick, *ibid*.
(7) Δ A/A = Δ(5)/(5) – (4) x Δ(6)/(6).
(8) A partir de (7).

GRÁFICO 3



podemos reconstruir sucesivamente la serie temporal *A*(*t*), como se muestra en el gráfico 3.

Estuve tentado de concluir este apartado señalando que la serie *A*(*t*), que pretende trazar un perfil a grandes rasgos del cambio técnico, parece, al menos, razonable. Pero tras pensarlo mejor, decidí que no tenía una noción previa de lo que sería "razonable" en este contexto. Voy constatando con satisfacción que la tendencia es marcadamente ascendente; de otro modo, no estaría escribiendo este artículo. Después de cada guerra mundial, se producen abruptas bajadas que, al igual que las intensas subidas que las precedieron, pueden racionalizarse fácilmente. Más que pensar da el hecho de que la curva muestre una inequívoca nivelación en la segunda mitad de la década de 1920. En la década de 1930 comienza de nuevo un alza sostenida. Los primeros años de la curva $\Delta A/A$ tienen un desagradable carácter en dientes de sierra, que supongo que es un artilugio estadístico.

LÍNEAS GENERALES DEL CAMBIO TÉCNICO

El lector se dará cuenta de que tengo la costumbre de denominar $\Delta A/A$ a la curva del gráfico 2, en vez de utilizar la fórmula más general, $\Delta F/F$. En realidad, si dispersamos $\Delta F/F$ en *K*/*L* (que no mostramos), no hallamos ni rastro de relación. Ello me permite afirmar como conclusión formal que en el período 1909-1949, los desplazamientos de la función agregada de producción produjeron un resultado neto aproximadamente neutral. Tal vez debamos recordar que nuestra definición de neutralidad implicaba que los desplazamientos eran simples cambios de escala, que no afectaban a las tasas marginales de sustitución para unos determinadas *ratios* capital-trabajo.

$\Delta A/A$ no sólo no está correlacionado con *K*/*L*, sino que casi se podría concluir, a partir del gráfico, que $\Delta A/A$ es básicamente constante en el tiempo, y muestra fluctuaciones más o menos aleatorias en torno a un punto medio fijo. Casi, no del todo, dado que hacia 1930 parece producirse una ruptura. Existe evidencia de que la tasa media de progreso entre los años 1909-1929 fue menor que la de 1930-1949. Nueve de cada 10 de los primeros 21 desplazamientos relativos tienen una media de un $\frac{9}{10}$ de 1por 100 al año, o sea 0,9 por cien, mientras que la media de los últimos 19 es de $2\frac{1}{4}$ por 100 anual, o sea 2,25 por 100. Incluso en el año 1929, que muestra un marcado desplazamiento hacia abajo, se pasa del primer grupo al segundo, todavía hay un contraste entre una tasa media del 1,2 por 100 en la primera mitad y un 1,9 por 100 en la segunda. Tal división *post hoc* de un período siempre es peligrosa. Quizá debería dejar las cosas así, dado que parece que el cambio técnico (interpretado con amplitud) puede haberse acelerado después de 1929.

El resultado general de los 40 años en su conjunto es un desplazamiento medio hacia arriba de alrededor de un 1,5 por 100 anual. Podemos compararlo con la cifra cercana al 0,75 por 100 anual obtenido por Stefan Valavanis-Vail mediante un método diferente y bastante menos general para el período 1869-1948 (4). Otra comparación posible es con los cálculos de producción por unidad de *input* de Jacob Schmookler (5), que muestran un aumento próximo al 36 por 100 en el producto por unidad de insumo entre las décadas de 1904–1913 y 1929–1938. Nuestra *A*(*t*) asciende al 36,5 por 100 entre 1929 y 1934. Sin embargo, estas estimaciones no son verdaderamente comparables, dado que las cifras de Schmookler incluyen a la agricultura.

Como última conclusión general, tras la cual dejo al lector interesado extraer sus propias impresiones, durante el período de 40 años el producto por hombre-hora se duplicó aproximadamente. Al mismo tiempo, según el gráfico 2, el desplazamiento ascendente acumulado de la función de producción se aproximó al 80 por 100. Es posible argumentar que cerca de un octavo del incremento total es imputable al aumento del capital por hombre–hora y que los restantes siete octavos se deben al cambio técnico. El razonamiento es como sigue: el PNB real por hombre-hora aumentó de $0,623 a $1,275. Dividamos la última cifra por 1,809, que es el valor de $A(t)$ en 1949, y por tanto el factor total de desplazamiento de los 40 años. El resultado es un PNB "corregido" por hombre–hora neto del cambio técnico de $0,705. De este modo, alrededor de 8 centavos del aumento de 65 centavos pueden atribuirse al aumento en la intensidad de capital y el resto al incremento en la productividad (6).

Desde luego, esto no sugiere que se hubiera mantenido la tasa observada de progreso técnico, incluso si la tasa de inversión hubiera sido mucho menor o hubiera descendido a cero. Obviamente, gran parte de la innovación, quizá casi toda, debe estar incorporada a la nueva planta y equipo para que pueda realizarse. Podemos imaginar que este proceso tiene lugar sin la formación neta de capital, a medida que se reemplazan los bienes de capital obsoletos por los últimos modelos, de modo que la *ratio* capital-trabajo no debe cambiar sistemáticamente. No obstante, esto conlleva problemas de definición y medición incluso mayores de los que habíamos ignorado alegremente hasta ahora. Fellner ha hecho hincapié en toda esta problemática.

En comparación, Solomon Fabricant (7) ha calculado que durante el período 1871–1951, cerca del 90 por 100 del incremento de producto per cápita puede atribuirse al progreso técnico. Es de suponer que esta cifra se basa en el tipo estándar de cálculo de producto por unidad de insumo.

A primera vista, puede parecer que los cálculos del producto por unidad de *input* de recursos proporcionan un sistema para medir los cambios de productividad, sin una carga excesiva de supuestos. Creo de hecho, que la carga implícita de supuestos es bastante grande, y que, en todo caso, el método propuesto arriba es mucho más general.

La habitual elección de promedios para calcular un insumo global de recursos no sólo supone algo parecido a mi supuesto de mercados competitivos de factores, sino que además el criterio de producto ÷ una suma ponderada de *inputs* podría tomarse tácitamente como que *asumimos*: (a) que el cambio técnico es neutral, y (b) que la función agregada de producción es *estrictamente* lineal. Ello explica por qué los resultados numéricos son tan paralelos en los dos métodos. Ya hemos comprobado la neutralidad, y, como se verá más adelante, una función de producción estrictamente lineal se ajusta perfectamente, aunque es claramente inferior a otras alternativas (8).

LA FUNCIÓN AGREGADA DE PRODUCCIÓN

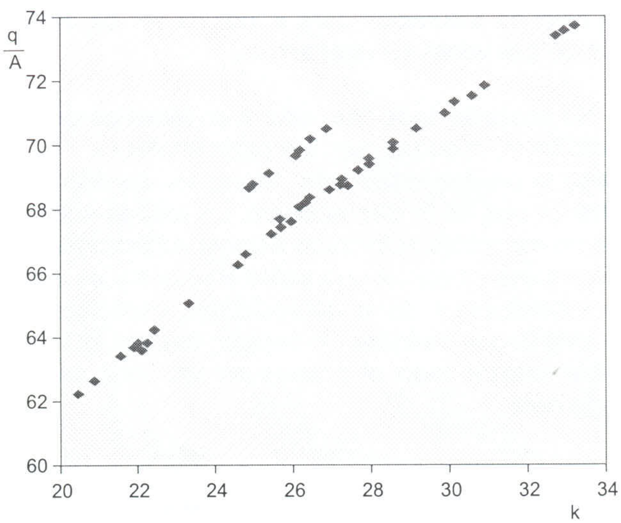
Volviendo ahora a la función agregada de producción, ya podemos escribirla de la forma [1a]. Si utilizamos el supuesto (casi inevitable) de los rendimientos constantes de escala, esa función se puede simplificar en la forma:

$$q = A(t) f(k,1) \qquad [3]$$

que constituye la base del gráfico 1. Se constató en el mismo que el mero enfrentamiento de q con k daría una visión distorsionada por el factor de desplazamiento $A(t)$. Cada punto estaría en un miembro distinto de la familia de las curvas de producción. Pero ahora contamos con una estimación de los valores sucesivos del factor de desplazamiento. (Obsérvese que esta estimación es totalmente *independiente* de cualquier hipótesis sobre la forma exacta de la función de producción). A partir de [3] aducimos que si hacemos un gráfico de $q(t)/A(t)$ respecto a $k(t)$, reducimos todos los puntos analizados a un *único* miembro de la familia de curvas del gráfico 1, y podemos proceder a discutir a continuación la forma de $f(k,1)$ y reconstruir la función agregada de producción. En el gráfico 4 se muestra una dispersión de q/A en k.

Si tenemos en cuenta la suma de alteraciones *a priori* que han experimentado las cifras brutas, el ajuste es muy ceñido. Excepto, claro está, en el caso del estrato de puntos que están, obviamente, demasiado altos. Estas observaciones independientes se refieren a los siete últimos años del período 1943-1949. Se disponen de forma casi totalmente paralela a la dispersión, lo que puede inducirnos a concluir que en 1943 la función agregada de producción sencillamente se desplazó. No obstante, todo el procedimiento anterior estaba dirigido a depurar dichos puntos de los desplazamientos de la función, de modo que ese camino está cerrado. Sospecho que la explicación reside en cierta incomparabilidad sistemática de la serie del capital en uso. En particular, es muy probable que hubiera durante la guerra un mayor uso de los servicios de capital a través de operaciones de dos y tres desplazamientos de lo que muestran las cifras de *stock*, incluso aplicando la fuerte corrección. Podemos apreciar con facilidad que tal subestimación de los insumos de capital nos lleva a sobrestimar el incremento de productividad. Así, de hecho, cada punto afectado debería estar en realidad más alto y más hacia la derecha. Pero un análisis más detallado nos dice que, para las magnitudes de que se trata, el resultado neto debería empujar las observaciones más cerca del resto de la dispersión.

GRÁFICO 4



En el mejor de los casos, esto puede aplicarse a los años de 1943 a 1945. Pero queda el período de posguerra. Aunque es posible que dicha operación multi-desplazamiento quedara bastante extendida incluso tras la guerra, no es probable que ello explicara por sí mismo toda la discrepancia (9). Podríamos sospechar que la amortización acelerada podría haber dado lugar a una subestimación de las existencias de capital después de 1945. De hecho, otros investigadores, especialmente Kuznets y Terborgh, han elaborado estimaciones de existencias de capital que sobrepasan las de Goldsmith al final del período. No obstante, de momento queda como un misterio.

En una primera versión de este artículo, mantuve resueltamente las recalcitrantes observaciones tal como estaban en un análisis de regresión del gráfico 4, básicamente porque dicha exclusión casual es una práctica que deploro en los demás. Sin embargo, tras llevar a cabo algunos experimentos, me pareció que dejarlos como estaban sólo conduciría a distorsionar perceptiblemente los resultados. De modo que, no sin ciertas dudas, en las regresiones que siguen he omitido las observaciones del período 1943-1949. Preferiría explicarlas de otra manera.

A través del gráfico 4, obtenemos una ineludible sensación de curvatura, de rendimientos decrecientes, persistentes pero no bruscos. En lo que respecta a la posibilidad de aproximarse a una saturación de capital, no se encuentran indicios en este nivel de producto bruto, pero incluso dejando de lado todas las demás dificultades, esa dispersión no nos permite elucubrar sobre qué pasaría con *ratios* K/L más elevados de los que hemos analizado.

En cuanto al ajuste de una curva a la dispersión, nos viene inmediatamente a la mente la función de Cobb–Douglas, pero lo mismo ocurre con otras formas paramétricas, habiendo poco margen de elección entre ellas (10). No puedo evitar pensar que no vamos a obtener nada de elegir la forma funcional, pero he experimentado con varias. Por lo general, me he limitado a familias de curvas de dos parámetros, lineales en los parámetros (por conveniencia de cálculo), y, al menos, capaces de mostrar rendimientos decrecientes (excepto en la línea recta, que, a este respecto, demostró ser inferior a todas las demás).

Las posibilidades concretas que se probaron fueron las siguientes:

$$q = \alpha + \beta k \qquad [4a]$$

$$q = \alpha + \beta \log k \qquad [4b]$$

$$q = \alpha - \beta / k \qquad [4c]$$

$$\log q = \alpha + \beta \log k \qquad [4d]$$

$$\log q = \alpha - \beta / k \qquad [4e]$$

De ellas, [4d] es el caso Cobb–Douglas; [4c] y [4e] tienen asíntotas más altas; la semilogarítmica [4b] y la hiperbólica [4c] deben cruzar el eje horizontal en un valor positivo de K y continuar hacia abajo, incluso con mayor pendiente, pero de manera irrelevante (lo que significa que sólo hay que alcanzar cierta k positiva antes de que pueda esperarse algún producto, pero ello excede en mucho el alcance de esta observación); [4e] comienza en el origen con una fase de rendimientos crecientes y el punto de inflexión tiene lugar en $k = \beta/2$; no es preciso decir que todos los puntos observados quedan a la derecha de éste.

Los resultados del ajuste de estas cinco curvas a la dispersión del gráfico 4 se muestran reflejados en el cuadro núm. 2.

Los coeficientes de correlación son tan uniformemente elevados que dudamos si añadir algún comentario al hecho de que las cinco funciones, incluso la lineal, son igualmente válidas para representar la forma general de los puntos observados. A partir de sólo las correlaciones, de sus valores, podemos deducir que la función de Cobb–Douglas [4d] y la semilogarítmica [4b] son algo mejor que las demás (11).

CUADRO NÚM. 2

Curva	α	β	r
4a . . .	0,438	0,091	0,9982
b	0,448	0,239	0,9996
c	0,917	0,618	0,9964
d	–0,729	0,353	0,9996
e	–0,038	0,913	0,9980

Dado que todas las curvas ajustadas tienen la forma $g(y)=\alpha+\beta h(x)$, podemos tomarlas como regresiones lineales, estando disponible un interesante test de validez propuesto por Prais y Houthakker (*ibid.*, página 51). Si disponemos los residuos de cada regresión por orden de valores crecientes de la variable independiente, entonces desearíamos disponer "aleatoriamente" esta secuencia en torno a la línea de regresión. Una fuerte correlación "serial" de los residuos, o unas cuantas largas series de residuos positivos alternando con largas series de residuos negativos serían la evidencia del tipo exacto de desviación suave de la linealidad que deseamos encontrar. Se puede elaborar un test utilizando las tablas publicadas de valores críticos para las series con dos tipos de elementos.

Hemos realizado esto con las funciones lineal, semilogarítmica y de Cobb–Douglas. Los resultados confirman sin género de duda la impresión visual de los rendimientos decrecientes del gráfico 4, demostrando que la función lineal ajusta sistemáticamente de forma deficiente. Entre [4b] y [4d], no hay mucho donde elegir (12).

UN APUNTE SOBRE LA SATURACIÓN

Ya hemos mencionado que la función agregada de producción no muestra signos de estabilizarse en una etapa de saturación de capital. Las dos curvas del cuadro núm. 2 que tienen asíntotas superiores (c y e) deben ubicar dicha asíntota aproximadamente en el mismo lugar. Los valores límite de q son, respectivamente, 0,92 y 0,97. Desde luego, ambas son verdaderas asíntotas, a las que se acercan los valores finitos de k sin llegar jamás a alcanzarlas. No podría ser de otra manera; ninguna función analítica puede nivelarse de repente y pasar a ser constante a no ser que siempre haya sido constante. Pero, por otro lado, no hay razón para esperar que la naturaleza sea infinitamente diferenciable. Así que cualquier conclusión más allá de lo que ya hemos observado en el gráfico 4 es necesariamente peligrosa. Pero, irónicamente, si tomamos 0,95 como estimación del nivel de saturación de q y usamos la función *lineal* [4a] (que es la que llega primero) como estimación de límite inferior del nivel de saturación para k, resulta ser de un 5,7, más de dos veces su valor actual.

No obstante, todo esto ocurre en términos de *producto bruto*, mientras que, a efectos analíticos, nos interesa la productividad *neta* del capital. La diferencia entre ambas es la depreciación, un asunto sobre el que no me siento autorizado a hacer estimaciones. Si hubiera una mayor certeza sobre el valor de las actuales estimaciones de la depreciación, especialmente durante largos períodos de tiempo, hubiera sido preferible realizar todo el análisis en términos de producto neto.

Sin embargo, podemos afirmar que la productividad marginal neta del capital es cero cuando el producto marginal bruto desciende hasta la "tasa marginal de depreciación", es decir, cuando añadiendo algún capital, sólo obtenemos el producto suficiente para compensar la depreciación de dicho incremento de capital. Durante estos últimos años, el PNN ha sido un poco mayor del 90 por 100 del PNB, de modo que el consumo de capital está un poco por debajo del 10 por 100 del producto bruto. A partir del cuadro núm. 1 podemos inferir que el capital por unidad de producción se sitúa entre 2 y 3. Así, la depreciación anual es del 3-5 por 100 de las existencias de capital. La saturación de capital podría tener lugar en el momento en que el producto marginal del capital cayera a un 0,03-0,05. Utilizando [4b], ello podría ocurrir cuando la *ratio K/L* estuviera alrededor del 5 o mayor, mucho más arriba aún de lo que hemos observado (13).

RESUMEN

Este artículo plantea un modo sencillo de diferenciar los desplazamientos de la función agregada de producción de los movimientos a lo largo de la misma. El método se basa en el supuesto de que a los factores se les retribuye según sus productos marginales, pero puede ampliarse fácilmente a mercados monopolísticos de factores. Entre las conclusiones que extraemos de una aplicación a grandes rasgos de los datos de EUA entre 1909 y 1949, están las siguientes:

1. El cambio técnico durante dicho período fue neutral por término medio.

2. El desplazamiento hacia arriba de la función de producción, aparte de las fluctuaciones, se produjo a una tasa de alrededor del 1 por 100 anual durante la primera mitad del período y de un 2 por 100 anual en la segunda mitad.

3. El producto bruto por hombre-hora se duplicó a lo largo del período, con un 87,5 por 100 de incremento atribuible al cambio técnico, y el restante 12,5 por 100 al incremento en la utilización del capital.

4. La función agregada de producción, corregida por el cambio técnico, ofrece una inequívoca sensación de rendimientos decrecientes, pero la curvatura no es brusca.

NOTAS

(*) Solow, Robert M. (1957), "Technical change and the aggregate production function", *The Review of Economic and Statistics*. Traducción de DIORKI, revisada por la Redacción de PERSPECTIVAS DEL SISTEMA FINANCIERO.

(**) Tengo una deuda de gratitud con el Dr. Louis Lefeber por su colaboración, tanto estadística como de otro tipo, y con los profesores Fellner, Leontief y Schultz por sus estimulantes sugerencias.

(1) La señora Robinson, en particular, ha explorado muchas de las profundas dificultades que se encuentran al dar un significado preciso a la cantidad del capital en "The Production Function and the Theory of Capital", *Review of Economic Studies*, vol. 21, nº 2) y yo he puesto en evidencia otros muchos obstáculos. Siempre que se disponga de datos, es preferible aplicar el análisis a una función de producción definida con precisión, con muchos *intputs* definidos exactamente. Al menos, podemos esperar que el análisis agregado nos aporte cierta noción de las conclusiones a que nos conduciría un estudio detallado.

(2) Los profesores Wassily Leontief y William Fellner me indicaron por separado que esta aproximación "de primer orden" se podía mejorar en principio. Tras calcular una función de producción corregida para un cambio técnico (véase más adelante), podemos volver atrás y utilizarla para obtener una segunda aproximación a la serie de desplazamientos, así como para futuras iteraciones.

(3) Otro factor que no he corregido son las variaciones en la duración de la semana laboral. En la medida en que la semana laboral se acorta, la intensidad de uso del capital existente disminuye, y las cifras de existencias sobrestiman los insumos de servicios de capital.

(4) S. Valavanis-Vail, "An Econometric Model of Growth, U.S.A. 1869-1953", *American Economic Review, Papers and Proceedings*, XLV, (mayo de 1955), 217.

(5) J. Schmookler, "The Changing Efficiency of the American Economy 1869-1938", *The Review of Economic and Statistics* (agosto de 1952), 226.

(6) Durante la primera mitad del período, 1909-1929, hay un cálculo similar que atribuye cerca de un tercio del incremento observado en el PNB por hombre-hora al aumento en la intensidad del capital.

(7) S. Fabricant, "Economic Progress and Economic Change", *34th Annual Report of the National Bureau of Economic Research* (New York, 1954).

(8) Para asistir a un excelente análisis de algunos de los problemas, véase M. Abramovitz, "Resources and Output Trends en the U.S. since 1870", *American Economic Review, Papers and Proceedings*, XLVI (mayo de 1956), 5-23. Algunas de las cuestiones que allí se suscitan se podrían contestar en principio con el método que utilizamos aquí. Por ejemplo, la aportación de la mejora de la calidad de la fuerza laboral se puede manejar para presentar varios niveles de trabajo cualificado como *inputs* separados. Debo al profesor T.W. Schultz un mejor conocimiento del hecho de que gran parte de lo que aparece como desplazamientos de la función de producción, representa mejoras de la calidad del insumo de trabajo, y, por tanto, es un importante resultado de la formación de capital real. Tampoco debemos olvidar que incluso el progreso técnico directo tiene un coste.

(9) Es esperanzador constatar que el nuevo libro del profesor Fellner se hace eco de la sospecha de que en la posguerra ha habido un importante incremento, con respecto a antes del conflicto, del predominio de la operación de múltiples desplazamientos. Véase *Trends and Cycles in Economic Activity*, Nueva York, 1956, 92.

(10) Puede verse un análisis del mismo problema en otro contexto en Prais y Houthakker, *The Analysis of Family Budgets*, Cambridge, Reino Unido, 1955, 82–88. Véase también S.J. Prais, "Non-linear Estimates of the Engel Curves", *Review of Economic Studies*, nº 52, 1952-53, 87-104.

(11) Sería temerario para un observador exterior (y quizá también para uno interior) aventurar una estimación sobre las propiedades estadísticas de la serie temporal básica. No obstante, podemos hacer unas cuantas afirmaciones generales. (a) El modo natural de introducir un término erróneo en la función agregada de producción es al multiplicar: $Q=(1+u)F(K,L;t)$. En el caso neutral parece que la estimación $A(t)$ absorberá el factor erróneo, con lo que el error en $\Delta A/A$ será aproximadamente $\Delta u/1 + u$. Si u tiene valor medio cero, la varianza de la estimación $\Delta A/A$ será aproximadamente $2(1-\rho)$ var u, en donde ρ es la primera autocorrelación de la serie u. (b) Supongamos que la distribución de la productividad marginal no es exacta, de modo que $K/Q\ \partial Q/\partial K = w_k + v_1$, en donde v es una desviación aleatoria y w_k es la cuota de utilidad de la propiedad. Entonces, el error en la estimación de $\Delta A/A$ será $v\ \Delta k/k$, con la varianza $(\Delta k/k)^2$ var v. Dado que K/L cambia lentamente, el factor multiplicador será muy pequeño. El efecto es influir en la estimación de $\Delta A/A$ de tal modo que nos lleve a realizar una sobrestimación cuando el capital reciba menos que su producto marginal (y k aumente). (c) Los errores en la estimación de $A(t)$ no causan realmente un gran perjuicio en lo que atañe al análisis de regresión. Los errores al observar k son más graves y es probable que sean grandes. El efecto, desde luego, será influir en las desviaciones de β hacia abajo.

(12) La prueba estadística es R, el número total de series, con pequeños valores significativos. Para [4a], $R = 4$; para [4b], $R = 13$. El valor crítico del 1 por 100 gira, en ambos casos, en torno a 9.

(13) Y eso con supuestos relativamente pesimistas sobre la manera en que el propio cambio técnico afecta a la tasa de consumo de capital. Es conveniente hacer aquí una advertencia: he dejado los datos del PNB de Kendrick a precios de 1939 y las cifras de existencias de capital de Goldsmith a precios de 1929. Antes de que alguien utilice los de β del cuadro núm. 2 para calcular un rendimiento del capital o cualquier número parecido, es necesario convertir Q y K a una base de precios comparables, mediante un cálculo fácil.