Una contribución a la teoría del crecimiento económico (*)

Robert M. Solow

I. INTRODUCCIÓN

Toda teoría parte de supuestos que no son totalmente ciertos. Eso es precisamente lo que la convierte en teoría. El arte de teorizar acertadamente consiste en hacer los inevitables supuestos simplificadores de tal forma que el resultado final no dé lugar a ulteriores consecuencias (1). Un supuesto "decisivo" es aquel del que dependen las conclusiones, y es importante que los supuestos decisivos sean razonablemente realistas. Si los resultados de una teoría parecen surgir de forma específica de un supuesto decisivo y si tal supuesto es dudoso, los resultados no pueden ser fiables.

Me gustaría poder argumentar que se cumple algo parecido en el modelo Harrod-Domar de crecimiento económico. La conclusión más característica e impactante de la línea de pensamiento subyacente en el modelo Harrod-Domar es que incluso el sistema económico a largo plazo se enfrenta, en el mejor de los casos, a una situación inestable en el "filo de la navaja" en términos de crecimiento de equilibrio. Si alguna vez las magnitudes de los parámetros principales —el coeficiente de ahorro, la relación capital-producto, la tasa de aumento de la fuerza laboral— se alejarán del centro exacto, la consecuencia sería un creciente desempleo o una inflación prolongada. Según los términos de Harrod, el punto crítico del equilibrio se reduce a la comparación entre la tasa natural de crecimiento, que, en ausencia de cambios tecnológicos depende del aumento del factor trabajo, y la tasa garantizada de crecimiento, que depende de los hábitos de ahorro e inversión de los hogares y las empresas.

Pero resulta que esta oposición fundamental entre la tasa garantizada y la natural nace de un supuesto decisivo según el cual la producción tiene lugar en condiciones de *proporciones fijas*. En la producción, no hay posibilidad de sustituir mano de obra por capital. Si abandonamos este principio crucial, la noción de equilibrio inestable, desaparece con él. De hecho, no debe sorprendernos que una rigidez tan grande en una parte del sistema implique falta de flexibilidad en otra.

Una característica a destacar del modelo Harrod-Domar es que estudia de manera sistemática los problemas a largo plazo utilizando las herramientas habituales para el corto plazo. El largo plazo suele concebirse como áreas de terreno propio del análisis neoclásico, el territorio de lo marginal. Por el contrario, Harrod y Domar hablan sobre el largo plazo en términos del multiplicador, el acelerador, "el" coeficiente de capital. La mayor parte del contenido de este artículo está dedicado a un modelo de crecimiento a largo plazo que acepta todos los supuestos de Harrod-Domar, excepto el de las proporciones fijas. En su lugar, doy por supuesto que cada bien compuesto se produce mediante una combinación del trabajo y capital de acuerdo con las condiciones neoclásicas convencionales. Estudiaremos con cierto detalle la adaptación del sistema a una tasa de incremento de la fuerza laboral determinada exógenamente, para comprobar si aparece la inestabilidad de Harrod. Las reacciones precio-salario-tipos de interés desempeñan un importante papel en este proceso neoclásico de ajuste, por lo que serán también objeto de análisis. A continuación, suavizaremos levemente algunos de los restantes supuestos poco flexibles para averiguar el resultado de los cambios cualitativos que puedan producirse; permitiremos un cambio tecnológico neutral, así como un plan de ahorro de interés elástico. Finalmente, consideraremos brevemente las consecuencias de ciertas relaciones y rigideces más "keynesianas".

II. UN MODELO DE CRECIMIENTO A LARGO PLAZO

Sólo hay un bien, que constituye la totalidad del producto y cuyo índice de producción se designa como $Y(t)$. De este modo, podemos referirnos sin ambigüedades a la renta real de la comunidad. Parte de lo que se produce en un momento dado se consume y el resto se ahorra e invierte. La fracción de producto ahorrado es una constante, s, por lo que el índice de ahorro es $sY(t)$. Las existencias de capital $K(t)$ de la comunidad adoptan la forma de acumulación del bien compuesto. Así pues, la inversión neta es la tasa de incremento de este *stock* de capital dK / dt, ó $\dot{K}$, de modo que tenemos la siguiente identidad básica en un momento dado:

$$\dot{K} = SY \tag{1}$$

Los bienes se producen mediante dos factores de producción, el capital y el trabajo, cuyo índice de aportación es $L(t)$. Las posibilidades tecnológicas vienen representadas por la función de producción:

$$Y = F(K, L) \tag{2}$$

Debemos concebir la producción como neta, una vez deducida la depreciación del capital. De momento, todo lo que diremos de la producción es que muestra rendimientos constantes de escala. De ahí que la función de producción sea homogénea en primer grado. Ello viene a sumarse al supuesto de la ausencia de recursos escasos y no aumentables, como la tierra. Los rendimientos constantes de escala parecen indicar que constituyen el supuesto natural que debe hacerse en una teoría del crecimiento. El caso de la escasez de tierra podría dar lugar a una disminución de los rendimientos de escala del capital y del trabajo, y el modelo pasaría a ser de un tipo más ricardiano (2).

Sustituyendo [2] en [1], obtenemos:

$$\dot{K} = sF(K, L) \tag{3}$$

Esta es una ecuación con dos incógnitas. Una manera de cerrar el sistema sería añadiendo una ecuación de demanda de trabajo; la productividad física marginal del trabajo es igual a la tasa del salario real; y una ecuación de oferta de trabajo. Esta última podría adoptar como fórmula general hacer que la oferta de trabajo sea una función del salario real o, en términos más clásicos, que este último se sitúe en un nivel convencional de subsistencia. En cualquier caso, habría tres ecuaciones con tres incógnitas: K, L, y el salario real.

En vez de ello, procederemos de una forma más acorde con el espíritu del modelo Harrod. Como consecuencia del crecimiento exógeno de la población, la fuerza laboral aumenta según una tasa relativa constante n. Si no se producen cambios tecnológicos, n es la tasa natural de crecimiento para el modelo Harrod. Así pues,

$$L(t) = L_0 e^{nt} \tag{4}$$

En [3], L representa el empleo total. En [4], L representa la oferta disponible de trabajo. Al identificar ambas, damos por supuesto que el empleo total se mantiene constante. Si sustituimos [4] en [3], tendremos:

$$\dot{K} = sF(K, L_0 e^{nt}) \tag{5}$$

Hemos obtenido la ecuación básica que determina la senda temporal de la acumulación de capital que hay que seguir si se trata de emplear toda la fuerza laboral disponible.

Alternativamente, podemos tomar [4] como una curva de oferta de trabajo. Esta curva nos dice que la fuerza laboral, que crece exponencialmente, se ofrece para trabajar de una manera del todo inelástica. La curva de oferta laboral es una línea vertical que va desplazando con el tiempo hacia la derecha en la medida en que la fuerza de trabajo crece según [4]. La tasa de salario real se ajusta entonces de manera que toda la población laboral se emplee, y la ecuación de la productividad marginal determina la tasa salarial que regirá de hecho (3).

En resumen, [5] es una ecuación diferencial con la única variable $K(t)$. Su solución nos da el único perfil temporal de las existencias de capital de la comunidad con las que se conseguirá el pleno empleo de la fuerza laboral disponible. Una vez que conozcamos el trayecto temporal de las existencias de capital y de la fuerza laboral, podemos calcular, a partir de la función de producción, el patrón temporal correspondiente de la producción real. La ecuación de la productividad marginal determina el patrón temporal del índice de salarios reales. Se da también como supuesto el pleno empleo del *stock* disponible de capital. En cualquier momento del tiempo, las existencias de capital preexistentes (el resultado de la acumulación previa) se ofertan de una forma inelástica. Por ello, existe una ecuación similar de productividad marginal para el capital, que determina la renta real por unidad de tiempo para los servicios del *stock* de capital. Podemos contemplar el proceso bajo esta perspectiva: en un momento determinado, la oferta de trabajo disponible viene dada por [4]; las existencias de capital disponibles también constituyen un dato. Dado que el rendimiento real de los factores deberá ajustarse para producir el pleno empleo de la fuerza laboral y del capital, podemos utilizar la función de producción [2] para hallar la tasa actual de producción. Después, la propensión al ahorro nos indicará qué parte de la producción neta se ahorra y cuál se invierte. De este modo, podemos conocer la acumulación neta de capital durante el período actual. Ésta, añadida al *stock* ya acumulado, nos dará el capital disponible para el siguiente período y podremos repetir todo el proceso.

III. POSIBLES PATRONES DE CRECIMIENTO

Para averiguar si siempre existe una vía para la acumulación de capital acorde con cualquier índice de crecimiento de la fuerza laboral, debemos estudiar la ecuación diferencial [5] debido a la naturaleza cualitativa de sus soluciones. Como es natural, no vamos a hallar la solución exacta sin especificar la forma exacta de la función de producción. No obstante, resulta sorprendentemente sencillo aislar algunas propiedades generales, incluso gráficamente.

Para ello, introducimos una nueva variable $r=\frac{K}{L}$, la relación entre capital y trabajo. De aquí, obtenemos $K=rL=rL_0e^{nt}$. Al diferenciar respecto al tiempo, tenemos que:

$$\dot{K}=L_0e^{nt}\,\dot{r}+nrL_0e^{nt}$$

Sustituyamos esto en [5]:

$$(\dot{r}+nr)L_0e^{nt}=sF(K,L_0e^{nt})$$

No obstante, dados los rendimientos constantes de escala, podemos dividir ambas variables de F por $L=L_0e^{nt}$, a condición de multiplicar F por el mismo factor. Así:

$$(\dot{r}+nr)L_0e^{nt}=sL_0e^{nt}F\left(\frac{K}{L_0e^{nt}},1\right)$$

y si dividimos por el factor común obtendremos:

$$\dot{r}=sF(r,1)-nr \qquad [6]$$

Con lo que nos encontramos con una ecuación diferencial en la que sólo aparece la relación capital-trabajo.

Podemos llegar a esta ecuación fundamental de una forma un poco menos formal. Dado que $r=\frac{K}{L}$, el índice relativo de cambio de r es la diferencia entre las tasas relativas de cambio de K y de L. Es decir:

$$\frac{\dot{r}}{r}=\frac{\dot{K}}{K}-\frac{\dot{L}}{L}$$

Tenemos, en primer lugar, $\frac{\dot{L}}{L}=n$. En segundo lugar, $\dot{K}=sF(K,L)$. Si sustituimos,

$$\dot{r}=r\frac{sF(K,L)}{K}-nr$$

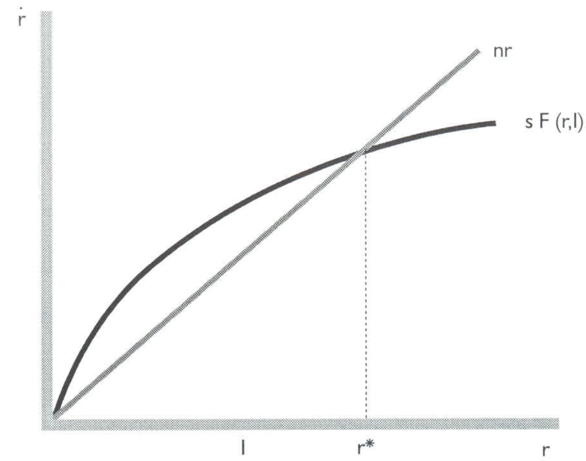
Dividamos ahora F entre L como antes; obsérvese que $\frac{L}{K}=\frac{1}{r}$, y obtendremos de nuevo [6].

La función $F(r,1)$ que aparece en [6] es fácil de interpretar. Es la curva del producto total en la medida en que se utilizan cantidades variables r de capital por unidad de trabajo. Alternativamente, nos da el producto por trabajador como una función del capital por trabajador. Así, [6] establece que el índice de variación de la relación capital-trabajo es la diferencia entre dos términos; uno representa el incremento de capital y el otro el incremento de trabajo.

Cuando $\dot{r}=0$, la relación capital-trabajo es una constante y las existencias de capital deben aumentar en la misma proporción que la fuerza de trabajo, a la que llamaremos n. (La tasa garantizada de crecimiento, garantizada por la tasa real correspondiente de rendimiento del capital, es igual a la tasa natural). En el gráfico 1, la recta que parte del origen con pendiente n representa la función nr. La otra curva es la función $sF(r,1)$. En el gráfico, pasa por el origen y sigue una línea convexa hacia arriba; no hay producto, a menos que ambos insumos sean positivos, y la productividad marginal del capital sea decreciente, como sería el caso, por ejemplo, en la función Cobb-Douglas. En el punto de intersección, $nr=sF(r,1)$ y $\dot{r}=0$. Si la *ratio* r^* capital-trabajo se estabilizara, se mantendría, y el capital y el trabajo crecerían proporcionalmente a partir de ese punto. Mediante rendimientos constantes de escala, el producto real crecerá también al mismo índice relativo n, y el producto per cápita de la fuerza laboral será constante.

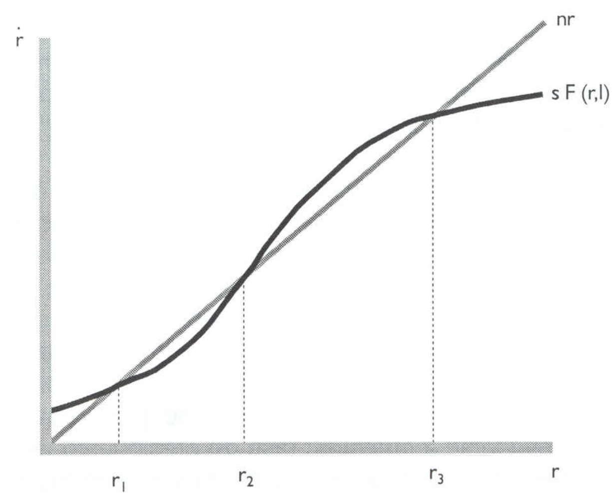
Pero si $r\neq r^*$, ¿cómo evolucionará la relación capital-trabajo a lo largo del tiempo? A la derecha del punto de intersección, cuando $r > r^*, nr > sF(r,1)$ y podemos deducir de [6] que r disminuirá hacia r^*. A la inversa, si inicialmente $r < r^*$, el gráfico muestra que $nr < sF(r,1), \dot{r} > 0$, entonces r aumentará hacia r^*. Así, el valor de equilibrio r^* es *estable*. Cualquiera que sea el valor inicial de la *ratio* capital-trabajo, el sistema evolucionará *hacia* un estado de crecimiento en equilibrio con una tasa natural. El patrón temporal, tanto del capital como del producto, no será exactamente exponencial, sino asintótico (4). Si las existencias iniciales de capital están por debajo de la *ratio* de equilibrio, el capital y el producto crecerán a un ritmo más rápido que la fuerza laboral hasta que se alcance la *ratio* de equilibrio. Si la *ratio* inicial está por encima del valor de equilibrio, capital y producto crecerán más lentamente que la fuerza laboral. El crecimiento del producto se sitúa siempre entre el crecimiento del trabajo y del capital.

GRÁFICO 1



Desde luego, la fuerte estabilidad que apreciamos en el gráfico 1 no es inevitable. El ajuste estable del capital y producto hacia un estado de crecimiento equilibrado se produce debido a la forma en que he dibujado la curva de productividad $F(r,1)$. A priori, son posibles otras muchas configuraciones. Por ejemplo, en el gráfico 2 hay tres puntos de intersección. Si lo examinamos, veremos que r_1 y r_3 son estables, pero no así r_2. Dependiendo de la relación capital-trabajo inicialmente observada, el sistema se encaminará hacia un crecimiento de equilibrio en la relación capital-trabajo r_1, o hacia r_3. En cada caso, la oferta de trabajo, las existencias de capital y el producto real aumentarán asintóticamente hacia el índice n, pero alrededor de r_1 habrá menos capital que cerca de r_3, con lo que el nivel de producto per cápita será menor en el primer caso que en el segundo. El equilibrio significativo dentro del crecimiento compensado se produce en r_1 para una *ratio* inicial que se encuentre en cualquier punto entre 0 y r_2, y en r_3 para toda *ratio* inicial superior a r_2. La *ratio* r_2 constituye en sí misma una *ratio* de crecimiento de equilibrio, pero inestable; cualquier perturbación accidental se magnificará con el paso del tiempo. Hemos dibujado el gráfico 2 de modo que sea posible el producto sin capital; de ahí que el origen no sea una configuración de "crecimiento" de equilibrio.

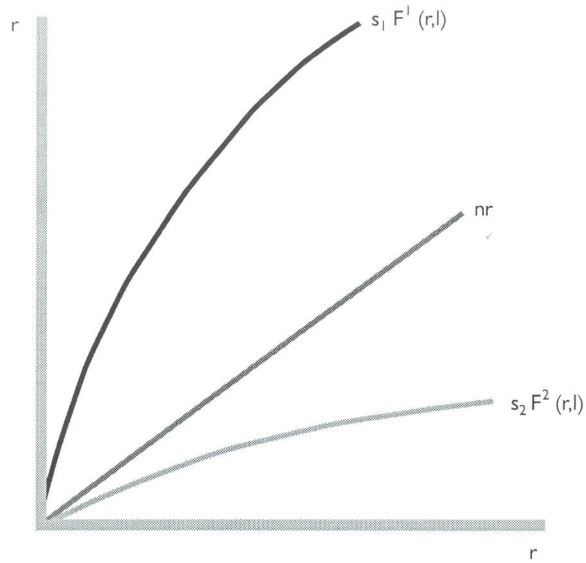
GRÁFICO 2



No obstante, ni siquiera el gráfico 2 agota todas las posibilidades. Es posible que no exista ningún crecimiento compensado de equilibrio (5). Se puede convertir *cualquier* función no decreciente $F(r,1)$ en una función de producción de rendimientos constantes de escala, multiplicándola simplemente por L. El lector puede elaborar una amplia variedad de esas curvas y examinar las soluciones resultantes en [6].

En el gráfico 3 se muestran dos posibilidades, junto con una recta nr. En ambas ha disminuido desde el principio la productividad marginal, y una se encuentra totalmente por encima de nr, mientras que la otra está por debajo, también en su totalidad (6). El primer sistema es tan productivo y ahorra tanto que el

GRÁFICO 3



pleno empleo perpetuo incrementará la *ratio* capital-trabajo (así como el producto per cápita) sin ninguna limitación; tanto el capital como la renta aumentan con mayor rapidez que la oferta de trabajo. El segundo sistema es tan improductivo que el trayecto hasta el pleno empleo sólo conduce a una eterna disminución de la renta per cápita. Dado que la inversión neta siempre es positiva y que la oferta de trabajo aumenta, la renta total sólo puede ascender.

La conclusión básica de este análisis es que, cuando tiene lugar la producción bajo las condiciones neoclásicas habituales de proporciones variables y rendimientos constantes de escala, no es posible una oposición simple entre la tasa de crecimiento natural y garantizada. Puede ser que no se sitúe nunca en el filo de la navaja (de hecho, en el caso de la función de Cobb-Douglas, no puede ocurrir nunca). El sistema puede ajustarse a cualquier tasa de crecimiento de la fuerza laboral, y, al final, alcanzar un estado de expansión proporcional estable.

IV. EJEMPLOS

En este apartado me propongo trabajar brevemente con tres ejemplos, tres elecciones simples de la forma de la función de producción para los cuales es posible resolver la ecuación diferencial básica [6] de forma explícita.

Ejemplo 1: Proporciones fijas. Este es el caso de Harrod-Domar. Requiere *a* unidades de capital para producir una unidad de producto; y *b* unidades de trabajo. Así, *a* es un coeficiente de aceleración. Desde luego, una unidad de producto puede producirse con *más* capital y/o trabajo (las isocuantas son ángulos rectos); el primer cuello de botella con que nos encontremos limitará el índice de producto. Esto puede expresarse en la forma [2], afirmando que:

$$Y = F(K, L) = \min\left(\frac{K}{a}, \frac{L}{b}\right)$$

en donde "min(...)" significa el menor de los números entre paréntesis. La ecuación diferencial básica [6] pasa a ser:

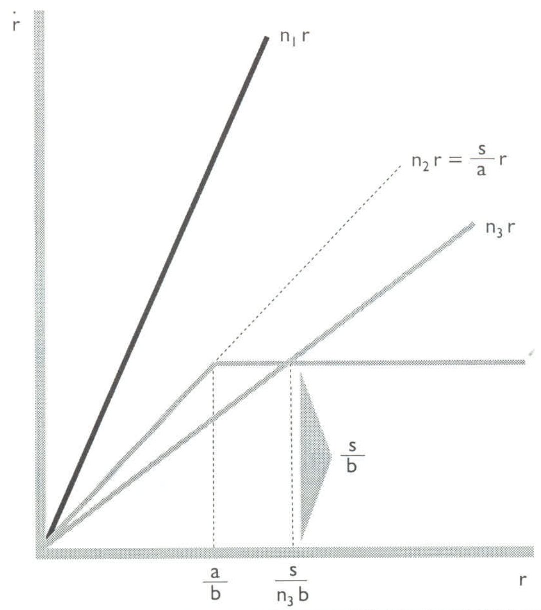
$$\dot{r} = s \min\left(\frac{r}{a}, \frac{1}{b}\right) - nr$$

Evidentemente, para una r muy pequeña debe ocurrir que $\frac{r}{a} < \frac{1}{b}$, de forma que, en este rango, $\dot{r} = \frac{sr}{a} - nr = \left(\frac{s}{a} - n\right) r$. Pero cuando $\frac{r}{a} \geq \frac{1}{b}$, es decir, cuando $r \geq \frac{a}{b}$, la ecuación pasa a ser $\dot{r} = \frac{s}{b} - nr$. Es más fácil comprender su funcionamiento en un gráfico. En el gráfico 4, la función $s \min\left(\frac{r}{a}, \frac{1}{b}\right)$ está representada por una línea discontinua: la recta que va del origen, con una pendiente $\frac{s}{a}$ hasta que r alcanza el valor $\frac{a}{b}$, y, a partir de ahí, una línea horizontal a la altura $\frac{s}{b}$. En el modelo Harrod, $\frac{s}{a}$ es la tasa garantizada de crecimiento.

Tenemos ahora tres posibilidades:

(a) $n_1 > \frac{s}{a}$, la tasa natural es mayor que la tasa garantizada. Podemos deducir del gráfico 4 que $n_1 r$ siempre es mayor que $s \min\left(\frac{r}{a}, \frac{1}{b}\right)$, por lo que r siempre disminuye. Supongamos que el valor inicial de la relación capital-trabajo es $r_0 > \frac{a}{b}$, entonces, $\dot{r} = \frac{s}{b} - n_1 r$, cuya solución es $r = \left(r_0 - \frac{s}{n_1 b}\right) e^{-n_1 t} + \frac{s}{n_1 b}$. De este modo, r disminuye hacia $\frac{s}{n_1 b}$ que, en cambio, es menor que $\frac{a}{b}$. En un punto temporal fácilmente calcula-

GRÁFICO 4



ble, al que llamaremos t_1, r alcanza $\frac{a}{b}$. A partir de entonces, $\dot{r} = \left(\frac{s}{a} - n_1\right) r$, cuya solución es $r = \frac{a}{b} e^{\left(\frac{s}{a} - n_1\right)(t - t_1)}$. Como $\frac{s}{a} < n_1$, r disminuirá hasta cero. En el instante t_1, cuando $r = \frac{a}{b}$, la oferta laboral y las existencias de capital se hallarán equilibradas. A partir de ese momento, conforme disminuya la *ratio* capital-trabajo, el trabajo pasará a ser redundante y crecerá el alcance de dicha redundancia. La medida del desempleo puede calcularse a partir del hecho de que $K = r L_0 e^{nt}$ recordando siempre que, cuando el capital es el factor que causa el cuello de botella, la producción es $\frac{K}{a}$ y el empleo es $b\frac{K}{a}$.

(b) $n_2 = \frac{s}{a}$, las tasas natural y garantizada son iguales. Si inicialmente $r > \frac{a}{b}$, de modo que el cuello de botella lo produce el trabajo, entonces r disminuye hasta $\frac{a}{b}$, y permanece en ese valor. Si inicialmente $r < \frac{s}{a}$, entonces r permanece constante a lo largo del tiempo, en una especie de equilibrio neutral. Las existencias de capital y la oferta laboral crecen a una tasa común n_2; se mantiene cualquier redundancia *porcentual* del trabajo que pudiera existir inicialmente.

(c) $n_3 < \frac{s}{a}$, la tasa garantizada es mayor que la natural. Formalmente, la solución es exactamente la misma que en el caso (a), sólo que reemplazamos n_1 por n_3. Se da una relación de capital y producción en equilibrio estable en el punto en que $r = \frac{s}{n_3 b}$. Pero en este caso, el capital es redundante, como podemos observar por el hecho de que la productividad marginal del capital haya caído a cero. La proporción de existencias de capital que se emplean efectivamente en el crecimiento de equilibrio es de $\frac{a n_3}{s}$. No obstante, dado que las existencias de capital crecen (con una tasa asintóticamente igual a n_3), la medida absoluta del exceso de capacidad también lo hace. Esta apariencia de redundancia, independiente de cualquier movimiento precios-salarios, es consecuencia de las proporciones fijas y otorga al modelo Harrod-Domar su carácter de equilibrio rígido.

Como mínimo, podemos imaginar una función de producción tal que, si r sobrepasa un valor crítico r_{max}, el producto marginal del capital desciende a cero, y si r no alcanza otro valor crítico r_{min}, el producto marginal del trabajo pasa a ser cero. Para las relaciones intermedias capital-trabajo, las isocuantas son las habituales. El gráfico 4 comienza con una parte lineal para $0 \leq r \leq r_{min}$, pasa después por una fase como la del gráfico 1 para $r_{min} \leq r \leq r_{max}$ y termina finalmente con un tramo horizontal para $r > r_{max}$. Hay toda una *zona* de tasas de crecimiento de la oferta de trabajo que conduce a un equilibrio como el del gráfico 1. Para valores de n por debajo de esta zona, el resultado final sería una redundancia de capital, y para valores de n por encima de esta zona, redundancia de trabajo. En la medida en que las proporciones de los factores sean muy variables a largo plazo, la zona intermedia de tasas de crecimiento será amplia.

Ejemplo 2: La Función Cobb-Douglas. Las propiedades de la función $Y = K^a L^{1-a}$ son de sobra conocidas y no necesitan comentario. En el gráfico 1 se describe la situación, con independencia de la elección de los parámetros a y n. La productividad marginal del capital se eleva indefinidamente, a medida que disminuye la relación capital-trabajo, de modo que la curva $sF(r,1)$ debe subir por encima de la recta nr. No obstante, dado que $a < 1$, la curva cruzará finalmente la recta desde arriba y se mantendrá posteriormente por debajo de la misma. De este modo, el comportamiento asintótico del sistema es siempre el de crecimiento equilibrado a la tasa natural.

La ecuación diferencial [6] es en este caso $\dot{r}=sr^{a}-nr$. De hecho, es más fácil volver a la ecuación sin transformar [5], que ahora sería:

$$\dot{K}=sK^{a}(L_0e^{nt})^{1-a} \quad [7]$$

Esta ecuación puede integrarse directamente, con lo que la solución es:

$$K(t)=\left[K_0^b-\frac{s}{n}L_0^b+\frac{s}{n}L_0^b\,e^{nbt}\right]^{\frac{1}{b}}$$

en donde $b=1-a$, y K_0 son las existencias iniciales de capital. Podemos ver fácilmente que, a medida que aumenta t, $K(t)$ crece básicamente en la forma $\left(\frac{s}{n}\right)^{1/b}L_0e^{nt}$, es decir, con la misma tasa de crecimiento que la fuerza laboral. El valor de equilibrio de la relación capital-trabajo es $r^*=\left(\frac{s}{n}\right)^{1/b}$. Ello se comprueba sustituyendo $\dot{r}=0$ en [6]. Es razonable que esta relación de equilibrio sea tanto mayor cuanto más alta sea la *ratio* de ahorro y más baja la tasa de incremento de la oferta de trabajo.

Es fácil calcular el patrón temporal del producto real a partir de la propia función de producción. De forma obviamente asintótica, Y se comportará como K y L, es decir, creciendo a la tasa relativa n. La renta real per cápita de la fuerza laboral, Y/L, tiende a alcanzar el valor $(s/n)^{a/b}$. De hecho, con la función Cobb-Douglas, siempre es cierto que $Y/L=(K/L)^a=r^a$. De ello se sigue que el valor de equilibrio de K/Y es s/n. No obstante, K/Y es el "coeficiente de capital" según los términos de Harrod, es decir, C. De modo que en el crecimiento de equilibrio a largo plazo, tendremos que $C = s/n$, o que $n = s/C$. La tasa natural es igual que "la" tasa garantizada, no por casualidad, sino como consecuencia de los ajustes oferta-demanda.

Ejemplo 3. Obtenemos toda una familia de funciones de producción con rendimientos constantes de escala mediante $Y=(aK^p+L^p)^{1/p}$. Se diferencia de la familia Cobb-Douglas en que es posible la producción con sólo un factor. No obstante, comparte la propiedad de que si $p<1$, la productividad marginal del capital pasa a ser infinitamente grande a medida que la *ratio* capital-trabajo tiende a cero. Si $p>1$, las isocuantas tienen una convexidad "incorrecta". Cuando $p=1$, las isocuantas son líneas rectas, perfectamente sustituibles. Me limitaré al caso en que $0<p<1$, que nos da los habituales rendimientos marginales decrecientes. De otro modo, sería muy delicado insistir en el pleno empleo de ambos factores.

En particular, consideraremos que $p=1/2$, de modo que la función de producción pasa a ser:

$$Y=(a\sqrt{K}+\sqrt{L})^2=a^2K+L+2a\sqrt{KL}$$

La ecuación diferencial básica es:

$$\dot{r}=s(a\sqrt{r}+1)^2-nr \quad [8]$$

Esta ecuación puede expresarse así:

$$\dot{r}=s[(a^2-n/s)r+2a\sqrt{r}+1]=s(A\sqrt{r}+1)(B\sqrt{r}+1)$$

en donde $A=a-\sqrt{n/s}$ y $B=a+\sqrt{n/s}$. La solución está implícita:

$$\left(\frac{A\sqrt{r}+1}{A\sqrt{r_0}+1}\right)^{1/A}\left(\frac{B\sqrt{r}+1}{B\sqrt{r_0}+1}\right)^{-1/B}=e\sqrt{nst} \quad [9]$$

Una vez más, es más sencillo referirnos a un diagrama. Hay dos posibilidades, que se ilustran en el gráfico 5. La curva $sF(r,1)$ comienza a la altura s cuando $r=0$. Si $sa^2>n$, no hay crecimiento de equilibrio; la *ratio* capital-trabajo aumenta indefinidamente, al igual que el producto real per cápita. El sistema es altamente productivo y tiene un nivel de ahorro-inversión a pleno empleo suficiente para ampliarse con gran rapidez. Si $sa^2 < n$, hay un crecimiento de equilibrio estable, al que se llega según la solución [9]. Podemos hallar la *ratio* de equilibrio capital-trabajo haciendo $\dot{r}=0$ en [8]. Es $r^*=(1/\sqrt{n/s}-a)^2$. A continuación, se puede calcular que la renta per cápita prevalente en el estado restrictivo de crecimiento es $1/(1-a\sqrt{s/n})^2$. Es decir, la renta real per cápita de la fuerza laboral se elevará hasta este valor si comienza por debajo, o viceversa.

V. COMPORTAMIENTO DE LOS TIPOS DE INTERÉS Y SALARIOS

Los patrones de crecimiento analizados en las secciones anteriores pueden contemplarse de dos formas. Desde un cierto punto de vista, no tienen significación causal, sino que indican simplemente el curso que habrán de tomar la acumulación de capital y la producción real si no han de aparecer ni el desempleo ni un exceso de capacidad. Sin embargo, desde otro punto de vista, podemos preguntarnos qué tipo de comportamiento del mercado hará que el modelo económico siga el patrón de crecimiento equilibrado. En este sentido, ya se ha dado por supuesto que la creciente fuerza laboral y el *stock* de capital existente se comportan de forma inelástica dentro del mercado, mientras que los salarios reales y la renta real del capital se ajustan de forma instantánea para equilibrar el mercado. No obstante, si las decisiones de ahorro e inversión se realizan de forma independiente, podrán satisfacerse ciertas condiciones adicionales de eficiencia marginal del capital. El propósito de esta sección es establecer el comportamiento de precios-salarios-intereses que sea apropiado para los patrones de crecimiento esbozados anteriormente.

El sistema se refiere a cuatro precios: (1) El precio de venta de una unidad de producto real (y dado que el producto real sirve también como capital, se considerará también como el precio de transferencia de una unidad del *stock* de capital), es decir, $p(t)$. (2) La tasa de salario monetario, $w(t)$. (3) La renta monetaria por unidad de tiempo de una unidad del *stock* de capital, $q(t)$. (4) La tasa de interés, $i(t)$. Uno de ellos puede eliminarse inmediatamente. En el sistema real en el que trabajamos, no es posible determinar el nivel absoluto de precios. Así, pues, podemos tomar como dado $p(t)$, el precio del producto real. Algunas veces será conveniente tomar p como una constante.

En una economía competitiva, los salarios reales y las rentas reales vienen determinadas por las ecuaciones tradicionales de la productividad marginal:

$$\frac{\partial F}{\partial L}=\frac{w}{p} \qquad [10]$$

y

$$\frac{\partial F}{\partial K}=\frac{q}{p} \qquad [11]$$

Nótese de paso que, con constantes rendimientos de escala, las productividades marginales sólo dependen de la *ratio* capital-trabajo r y no de ninguna cantidad de escala (7).

La renta real del capital q/p es una tasa propia de interés, es el rendimiento del capital, en unidades de *stock* de capital. Un propietario de capital puede incrementar sus posesiones mediante la obtención de rendimientos y su reinversión, como interés compuesto a la tasa instantánea *variable* q/p, es decir, de la forma $e^{\int_0^t q/p\,dt}$. En condiciones de arbitraje perfecto hay una relación íntima muy conocida entre la tasa monetaria de interés y la tasa propia del bien, a saber:

$$i(t)=\frac{q(t)}{p(t)}+\frac{\dot{p}(t)}{p(t)} \qquad [12]$$

Si el nivel de precios es de hecho constante, coincidirán la tasa propia y la tasa de interés. Si el nivel de precios desciende, la tasa propia debe superar a la tasa de interés para inducir a la gente a que posea bienes. Podemos comprobar de múltiples maneras que la relación exacta es como en [12]. Por ejemplo, el propietario de 1 dólar en el momento t, tiene dos opciones: puede prestar el dinero durante un breve espacio de tiempo, digamos hasta $t + h$, y ganar un interés de, aproximadamente, $i(t)h$; o puede comprar $1/p$ unidades de producto, conseguir unos rendimientos de $(g/p)h$, y entonces, vender. En el primer caso, poseerá $1 + i(t)h$ al final del período; en el segundo caso, tendrá $q(t) / p(t)h + p(t+h) / p(t)$. En equilibrio, estas dos cantidades deben ser iguales:

$$1+i(t)h=\frac{q(t)}{p(t)}h+\frac{p(t+h)}{p(t)}$$

o bien,

$$i(t)h=\frac{q(t)}{p(t)}h+\frac{p(t+h)-p(t)}{p(t)}$$

Si dividimos ambos términos por h y suponemos que h tiende a cero, obtenemos [12]. De este modo, esta condición iguala el atractivo de poseer la riqueza bajo la forma de acciones de capital o de fondos prestables.

Otro modo de derivar a [12] y obtener cierta perspectiva de su papel en nuestro modelo es observar que $p(t)$, el precio de transferencia de una unidad de capital, debe ser igual al valor actual de su flujo futuro de rendimientos netos. De este modo, con una previsión perfecta de los rendimientos y tasas de interés futuros:

$$p(t)=\int_t^{\infty} q(u)e^{-\int_t^u i(z)\,dz}\,du$$

Si diferenciamos respecto al tiempo, obtendremos [12]. De este modo, dentro de los estrechos límites de nuestro modelo (en particular, la ausencia de riesgo, la propensión media fija al ahorro y carencia de complicaciones monetarias), la tasa monetaria de interés y los rendimientos a los propietarios del capital permanecerán exactamente en la relación precisa para inducir a la comunidad a poseer el *stock* de capital existente. La ausencia de riesgo e incertidumbre se deja sentir sobre todo en la ausencia de preferencias sobre los activos.

Dado el nivel absoluto de precios $p(t)$, las ecuaciones [10]-[12] determinan las otras tres variables del precio, cuyo comportamiento puede así calcularse una vez que conocemos el patrón concreto de crecimiento.

Antes de señalar cómo se desarrollarán los cálculos en los ejemplos de la sección IV, es posible tener una visión esquemática general, en especial si hay un equilibrio estable de crecimiento compensado. En el gráfico 6 se muestra el mapa ordinario de isocuantas de la función de producción $F(K,L)$, así como algunos tipos posibles de patrones de crecimiento. En el gráfico 6 se representa una determinada *ratio* capital-trabajo r^* mediante una recta que parte del origen, con pendiente r^*. Supongamos que se da una *ratio* r^* asintótica estable; en este caso, todos los patrones de crecimiento que se derivan de condiciones iniciales arbitrarias se acercarán a la recta en el límite. Mostramos dos de dichos patrones, que parten de los puntos iniciales P_1 y P_2. Dado que en el gráfico 1 el acercamiento de r a r^* era monotónico, los patrones deben tener el aspecto que aparece en el gráfico 6. Vemos que si la *ratio* inicial capital-trabajo es mayor que el valor de equilibrio, la *ratio* desciende, y viceversa.

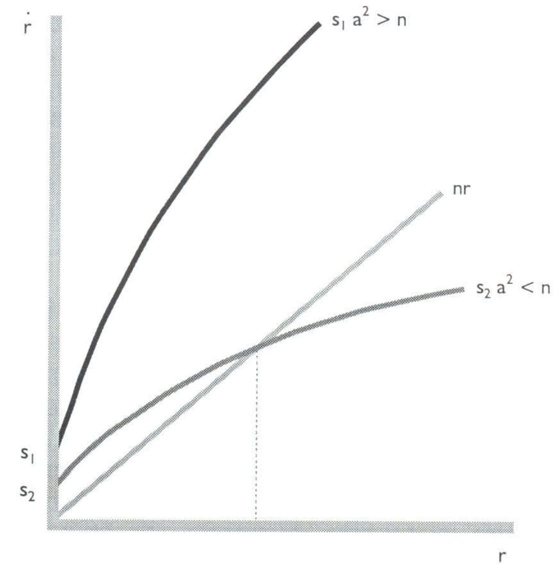
El gráfico 7 corresponde al gráfico 2. Hay tres rectas "de equilibrio", pero la más interior es inestable. La recta interior es la línea divisoria entre las condiciones iniciales que conducen a una de las rectas estables y las que conducen a la otra. Por supuesto, todas las sendas se dirigen hacia arriba y hacia la derecha, sin curvarse hacia abajo; K y L aumentan siempre.

El lector puede dibujar un diagrama que corresponda al gráfico 3, en el que los patrones de crecimiento pasen a ser rectas cada vez más empinadas, o cada vez más llanas, que significarán, respectivamente, $r^{\to\infty}$ o bien que $r^{\to 0}$. Debo subrayar de nuevo que K y L, y, por tanto, Y, aumentan, pero si $r^{\to 0}$, Y / L descenderá.

Gracias a los rendimientos constantes de escala, sabemos ahora que a lo largo de una recta que parte del origen, la pendiente de las isocuantas es constante. Ello expresa el hecho de que los productos marginales sólo dependen del factor *ratio*. Pero en competencia, la pendiente de la isocuanta refleja la *ratio* de los precios de los factores. Por ello, a una r^* estable como la del gráfico 6, corresponde una *ratio* de equilibrio w / q. De la misma manera, si las isocuantas tienen la convexidad normal, parece evidente que, conforme r asciende hasta r^*, la *ratio* w / q sube hasta su valor límite, y lo contrario si r baja.

En el caso inestable en que r tiende a infinito o a cero, puede ocurrir que w / q tienda a infinito o a cero. Por otro lado, si las isocuantas llegan a los ejes con pendientes intermedias entre la vertical y la horizontal, la *ratio* w / p del precio de los factores tenderá a un límite finito.

GRÁFICO 5



También puede ser útil señalar que la pendiente de la curva $F(r,1)$ es la productividad marginal del capital al valor correspondiente de r. Por tanto, podemos trazar el curso de los rendimientos reales q / p en los gráficos 1, 2 y 3. Recordemos que en dichos diagramas $F(r,1)$ se ha visto reducida por el factor s, al igual que la pendiente de la curva. $F(r,1)$ representa a Y / L, la producción por unidad de trabajo, como una función de la *ratio* capital-trabajo.

Por lo general, si existe un patrón estable de crecimiento, la caída en el salario real o en la renta real necesarias para alcanzarlo pueden no ser en absoluto catastróficas. Si hay una reducción inicial de trabajo (comparado con la *ratio* de equilibrio), el salario real deberá caer. Cuanto más alta sea la tasa de aumento de la fuerza laboral y más baja sea la propensión al ahorro, más baja será la *ratio* de equilibrio, y, por tanto, más tendrá que caer el salario real. No obstante, la caída no es indefinida. Le debo a John Chipman la observación de que este resultado contradice directamente la posición de Harrod (8), quien afirma que sería precisa una tasa de interés en perpetua caída para mantener el equilibrio.

En el caso Harrod-Domar, se producen cambios catastróficos en los precios de los factores, pero de nuevo es consecuencia del supuesto especial de las proporciones fijas. He analizado en otro lugar el comportamiento de los precios de los factores en el modelo Harrod (9), pero describí allí el nivel de los precios y la tasa de interés, pero omití cualquier consideración sobre los precios de los factores. De hecho, no hay gran cosa que decir. Las isocuantas, en el caso de Harrod, son ángulos rectos, lo que habla por sí mismo. Volviendo al gráfico 4, si la *ratio* capital-trabajo observada es mayor que a/b, el capital es absolutamente redundante, su producto marginal es cero y todo el valor del producto se imputa al trabajo. Así, $q=0$, y $bw=p$, de modo que $w=p/b$. Si la r que hemos observado es menor que a/b, el trabajo es absolutamente redundante y $w=0$, con lo que $q=p/a$. Si el trabajo y el capital están compensados, $r=a/b$, con lo cual, obviamente, no es posible imputar ninguna fracción específica del producto al trabajo ni al capital por separado. De lo único que podemos estar seguros es de que volveremos a imputar el valor total de una unidad de producto p a la dosis compuesta de a unidades de capital y b unidades de trabajo (siendo escasos ambos factores). Por tanto, w y q pueden tener cualquier valor, sólo sujeto a la condición $aq+bw=p, aq/p+bw/p=1$. Así, en el gráfico 4, capital o trabajo deben ser redundantes en cualquier punto, excepto en $r=a/b$, en el que los precios de los factores son indeterminados. Y sólo en circunstancias especiales se cumple que $r=a/b$.

Consideraremos a continuación el caso Cobb-Douglas: $Y=K^a L^{1-a}$ y $q/p=a(K/L)^{a-1}=ar^{a-1}$. Por tanto, $w/q=\frac{1-a}{a}r$. Podemos calcular fácilmente las pautas temporales exactas de los precios reales de los factores a partir de la solución de [7], pero no ofrecen un interés especial. No obstante, ya afirmamos que la *ratio* restrictiva capital-trabajo es $(s/n)^{1/1-a}$. De ahí que la tasa salarial real de equilibrio sea $(1-a)(s/n)^{a/1-a}$ y que la renta real de equilibrio sea an/s. Estas conclusiones son, cualitativamente, las que estábamos esperando. Como siempre sucede con la función Cobb-Douglas, la cuota de trabajo en la producción real es constante.

Nuestro tercer ejemplo nos aporta una cierta variedad. A partir de $Y=(a\sqrt{K}+\sqrt{L})^2$, podemos calcular que $\partial Y/\partial L=a\sqrt{\frac{K}{L}}+1=a\sqrt{r}+1$. En los casos en los que existe un crecimiento de equilibrio compensado, (véase final del apartado IV), $r^*=\left(\frac{1}{\sqrt{n/s}-a}\right)^2$; por tanto, el salario límite real es de $w/p=\frac{1}{\sqrt{n/s}-a}+1=\frac{1}{1-a\sqrt{s/n}}$. Previamente, habíamos calculado que, en crecimiento de equilibrio, $Y/L=\left(\frac{1}{1-a\sqrt{s/n}}\right)^2$. No obstante, la cuota relativa del trabajo es de $(w/p)(L/Y)=1-a\sqrt{s/n}$. No es como en el caso de la Cobb-Douglas, en la que las cuotas relativas son independientes de s y de n, y sólo dependen de la función de producción. Aquí podemos ver que, *en situación de crecimiento de equilibrio*, el peso relativo del trabajo es mayor cuanto más alta sea la tasa

GRÁFICO 6

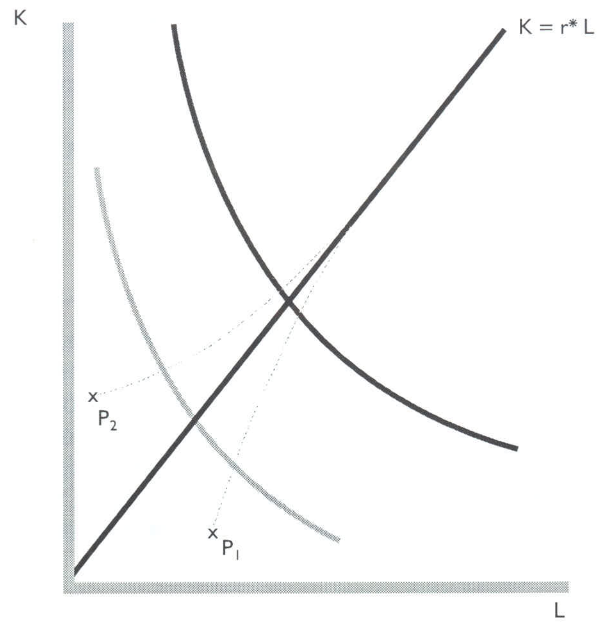
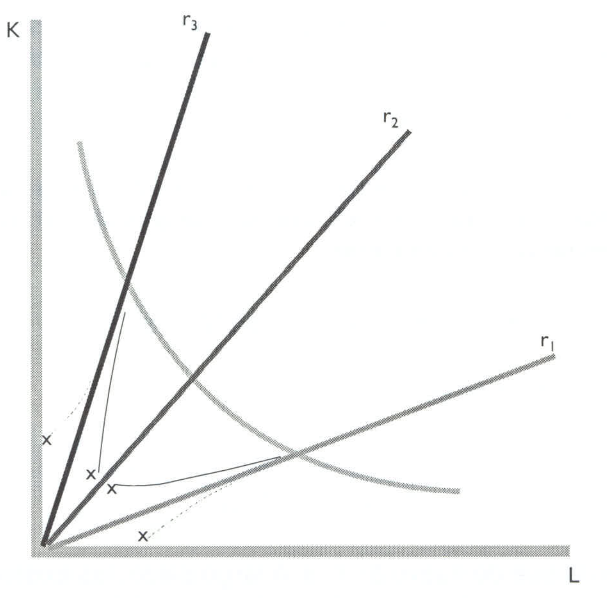


GRÁFICO 7



de incremento de la fuerza laboral, y cuanto menor sea la propensión al ahorro. De hecho, como era de esperar, cuanto más rápido sea el aumento de la fuerza laboral más bajos serán los salarios reales en el estado de equilibrio de crecimiento estable; pero los salarios reales más bajos permiten todavía que la cuota de utilidad real sea mayor para una mayor fuerza de trabajo.

VI. AMPLIACIONES

Cambio tecnológico neutral. En principio, podemos contemplar cambios perfectamente arbitrarios a lo largo del tiempo en la función de producción, pero es poco probable que nos lleven a conclusiones sistemáticas. Un tipo de cambio tecnológico especialmente fácil es el que se limita a multiplicar la función de producción por un factor de escala creciente. De esta manera, alteramos [2] para obtener:

$$Y = A(t) F(K, L) \qquad [13]$$

El mapa de isocuantas no se altera, pero el número de producción asociado a cada isocuanta se multiplica por $A(t)$. Podemos comprobar cómo se ve afectada la *ratio* de equilibrio capital-trabajo (ahora en constante cambio) en un diagrama como el del gráfico 1, si ampliamos la función $sF(r, 1)$.

El caso Cobb-Douglas funciona de forma muy sencilla. Tomemos $A(t) = e^{gt}$, con lo que la ecuación diferencial básica pasa a ser:

$$\dot{K} = se^{gt} K^a \, (L_0 e^{nt})^{1-a} = sK^a L_0^{1-a} e^{(n(1-a)+g)\,t}$$

cuya solución es:

$$K(t) = \left[K_0^{\,b} - \frac{bs}{nb+g} L_0^{\,b} + \frac{bs}{nb+g} \, L_0^{\,b} e^{(nb+g)\,t} \right]^{1/b}$$

en la que de nuevo $b = 1-a$. A largo plazo, las existencias de capital aumentan a la tasa relativa $n + g / b$ (comparada con n, cuando no haya cambio tecnológico). La tasa final de aumento del producto real es $n + ag / b$. No sólo es más rápida que n, sino que (si $a > 1/2$), puede ser incluso más rápida que $n + g$. Ello se debe desde luego a que un mayor producto real implica mayor ahorro e inversión, lo cual contribuye a complicar aún más la tasa de crecimiento. En realidad, la *ratio* capital-trabajo nunca alcanzará un valor de equilibrio, sino que crecerá constantemente. Desde luego, el aumento en la velocidad de crecimiento de la fuerza laboral nunca podrá igualar la capacidad de inversión, siempre en aumento. Es por ello que K / L aumenta, creciendo al final a una tasa g / b. Si la *ratio* inicial capital-trabajo es muy elevada, es posible que caiga al principio, pero volverá a tener un comportamiento asintótico, tal como hemos indicado.

Dado que, al final, la *ratio* capital-trabajo crece sin límite, lo que sigue de ello es que los salarios reales crecerán más y más. Por otra parte, la propiedad especial de la función de Cobb-Douglas es que la cuota relativa de trabajo es constante en $1-a$. Los restantes hechos básicos estructurales surgen de lo que ya se ha indicado. Por ejemplo, dado que Y crece al final a una tasa $n + ag / b$ y K lo hace a una tasa $n + g / b$, el coeficiente de capital K / Y crece a una tasa $n + g / b - n - ag / b = g$.

La oferta de trabajo. Por lo general, desearíamos hacer que la oferta de trabajo fuera una función de la tasa salarial real y del tiempo (dado que la fuerza laboral está en crecimiento). Suponemos que $L = L_0 e^{nt}$, es decir, que la curva de oferta de trabajo es completamente inelástica con relación al salario real y que se desplaza hacia la derecha según el tamaño de la fuerza laboral. Podemos hacer una generalización, dando por supuesto que, cualquiera que sea el tamaño de la fuerza laboral, la proporción que se ofrezca dependerá del salario real. Concretamente:

$$L = L_0 e^{nt} \left(\frac{w}{p} \right)^h \qquad [14]$$

Otra forma de describir este supuesto es comprobar que se trata de una ampliación de la escala de una curva de elasticidad constante. En un análisis detallado, este determinado patrón de oferta de trabajo deberá modificarse en los salarios reales muy altos, puesto que, dado el tamaño de la fuerza laboral, hay un límite superior para la cantidad de trabajo que se puede ofrecer, y [14] no refleja este hecho.

Nuestra anterior ecuación diferencial [6] para la *ratio* capital-trabajo se complica ahora un poco más. Si para simplificar hacemos constante el nivel de precios, tenemos:

$$\dot{r} = sF(r, 1) - nr - h \frac{\dot{w}}{w} \qquad [6a]$$

Debemos añadir a [6a] la condición [10] de productividad marginal $\frac{\partial F}{\partial L} = \frac{w}{p}$. Dado que el producto marginal del trabajo sólo depende de r, podemos eliminar w.

No obstante, esto suele crear complicaciones, y por ello, retorno de nuevo a la función más manejable de Cobb-Douglas. En ese caso, [10] se transforma en

$$\frac{w}{p}=(1-a)r^{a}$$

y, de ahí, en

$$\frac{\dot{w}}{w}=\frac{\dot{r}}{r}$$

Tras una pequeña manipulación, [6a] puede expresarse así:

$$\dot{r}=\left(sF(r,1)-nr\right)\left(1+\frac{ah}{r}\right)^{-1}$$

que nos ofrece una perspectiva de cómo cambian las cosas con una oferta laboral elástica. En primer lugar, aún existe un estado de equilibrio de crecimiento, cuando el término de la derecha es igual a cero, y todavía es estable, cercano a las condiciones iniciales. Por otra parte, la *ratio* de equilibrio capital-trabajo *no ha variado*, dado que $\dot{r}$ pasa a ser cero exactamente donde lo hizo antes. Por supuesto, no siempre ocurre así; es consecuencia del plan especial de oferta laboral [14]. Dado que r se comporta en gran medida de la misma manera, también lo harán las cantidades que sólo dependan de r, como el salario real.

El lector amante del detalle puede demostrar que, a largo plazo, las existencias de capital y el producto real crecerán a la misma tasa n que la fuerza laboral.

Si damos por sentado de manera general que $L=G(t,w/p)$, entonces [6] adoptará la forma

$$\dot{r}=sF(r,1)-\frac{r}{G}\left(\frac{\partial G}{\partial t}+\dot{w}\frac{\partial G}{\partial\left(\frac{w}{p}\right)}\right) \qquad [6b]$$

Si $\dot{r}=0$, entonces $\dot{w}=0$, y la *ratio* de equilibrio capital-trabajo viene determinada por:

$$sF(r,1)=\frac{r}{G}\frac{\partial G}{\partial t}$$

A no ser que $1/G \;\; \partial G/\partial t$ sea siempre igual a n, como sucede en [14], la *ratio* de equilibrio capital-trabajo *quedará afectada* por la introducción de una oferta de trabajo elástica.

Ratio variable de ahorro. Hasta ahora, a pesar de lo que pudiera ocurrir en el modelo, siempre ha habido crecimiento, tanto de la fuerza laboral como de las existencias de capital. El crecimiento de la fuerza laboral venía dado de forma exógena, mientras que el de las existencias de capital era inevitable porque tomábamos la *ratio* de ahorro como una constante absoluta. Siempre que la utilidad real fuera positiva, debía resultar una formación positiva de capital neto. Ello excluye la posibilidad de un estado estacionario del tipo Ricardo-Mill, y sugiere el experimento de hacer que la tasa de ahorro dependa del rendimiento del capital. Si el ahorro puede bajar a cero cuando la utilidad es positiva, es posible que la inversión neta cese y que las existencias de capital, al menos, pasen a ser estacionarias. No obstante, la fuerza laboral seguirá creciendo; nos llevaría muy lejos de nuestro objetivo seguir el modo clásico con una teoría del crecimiento de la población y una oferta fija de tierra.

El modo más sencillo de dejar que la tasa de interés o los rendimientos del capital influyan en el volumen de ahorro es conseguir que la fracción de la utilidad que se ahorre dependa de los rendimientos reales de los propietarios del capital. De este modo, el ahorro total será $s(q/p)Y$. En una situación de rendimientos constantes de escala y de competencia, el rendimiento real sólo dependerá de la *ratio* capital-trabajo, por lo que podremos convertir fácilmente la *ratio* de ahorro en una función de r.

Todos estamos familiarizados con las discusiones no concluyentes, tanto abstractas como econométricas, acerca de si el tipo de interés ejerce verdaderamente un efecto independiente en el volumen de ahorro, y, si es así, en qué dirección lo hace. Sin embargo, a efectos de este experimento, la suposición más natural que podemos hacer es que la *ratio* de ahorro depende positivamente del rendimiento del capital (e inversamente, por tanto, de la *ratio* capital-trabajo).

Por conveniencia, me permitirán omitir el paso de q/p a r a través de la productividad marginal y que exprese simplemente el ahorro como $s(r)Y$. Por tanto, la única modificación de la teoría es que la ecuación fundamental [6] pasa a ser

$$\dot{r}=s(r)F(r,1)-nr \qquad [6c]$$

El tratamiento gráfico es en gran parte el mismo que antes, excepto que ahora debemos incluir el factor variable $s(r)$. Puede ocurrir que si r es lo suficientemente grande, $s(r)$ sea cero. (Este caso sólo se dará si, primero, hay una renta real tan baja que cesa el ahorro, y, segundo, si la función de producción es tal que una *ratio* capital-trabajo muy alta hará descender las rentas reales hasta ese valor crítico. No todas las funciones de producción satisfacen esta última condición). Si es así, $s(r)F(r,1)$ será igual a cero para cualquier r lo bastante grande. Si $F(0,1) = 0$, es decir, si no hay producción posible sin capital, $s(r)F(r,1)$ debe volver a cero en el origen, con independencia de lo elevada que sea la *ratio* de ahorro. Pero tampoco esto es inevitable. Se ofrece una posible representación en el gráfico 8. Como es habitual, hallamos r^*, la *ratio* de equilibrio capital-trabajo, poniendo $\dot{r}=0$ en [6c]. En el gráfico 8 el equilibrio es estable, y, al final, el capital y el producto crecerán a la misma tasa que la fuerza laboral.

Por lo general, si $s(r)$ desaparece para un valor elevado de r, se elimina la posibilidad de un incremento indefinido y fuera de control de la *ratio* capital-trabajo, como en el gráfico 3. Para que esto ocurra, *no es necesario* que la *ratio* de ahorro sea cero, pero si es así, tenemos la certeza de que la última intersección con nr será estable.

Si comparamos cualquier $s(r)$ en particular con una *ratio* de ahorro constante, las dos curvas se cruzarán en el valor de r para el cual $s(r)$ es igual a la antigua *ratio* constante. Hacia la derecha, la nueva curva estará por debajo (dado que hemos asumido que $s(r)$ es una función decreciente), y hacia la izquierda estará por encima de la antigua curva. Podemos ver fácilmente, por ejemplo, que el equilibrio r^* puede ser mayor o menor de lo que era antes. Es posible una amplia variedad de formas y sendas, pero el efecto neto tiende a ser estabilizador; cuando la *ratio* capital-trabajo es elevada, el ahorro desciende; cuando es baja, se estimula el ahorro. Pero sigue sin ser posible un estado estacionario; si r llegara a ser tan alta que imposibilitara el ahorro y la formación neta del capital, el crecimiento continuo de la fuerza laboral deberá disminuirla finalmente.

Existencia de impuestos. Mi colega E.C. Brown me señala que todo el análisis anterior puede ser ampliado para dar cabida a los efectos del impuesto sobre la renta personal. En el caso más sencillo, supongamos que el Estado recauda un impuesto proporcional sobre la renta a la tasa t. Si todos los ingresos se destinan a la formación de capital, la identidad ahorro-inversión [1] pasa a ser:

$$\dot{K}=s(1-t)Y+tY=\big(s(1-t)+t\big)Y$$

Es decir, la *ratio* de ahorro efectivo *se ha incrementado* de s a $s+t(1-s)$. Si el producto del impuesto se consume directamente, la *ratio* de ahorro *disminuye* de s a $s(1-t)$. Si invertimos una fracción v del producto del impuesto y se consume el resto, la *ratio* de ahorro pasa a ser $s+(v-s)t$, que es mayor o menor que s, según que el Estado invierta una fracción de sus ingresos mayor o menor que la economía privada. Pueden esquematizarse los efectos en diagramas como el del gráfico 1: la curva $sF(r,1)$ se ha ampliado o contraído uniformemente y la *ratio* de equilibrio capital-trabajo se ha desplazado en consecuencia. Los impuestos no proporcionales son más difíciles de incorporar, pero producirían giros más interesantes en los diagramas. Naturalmente, la presencia de un impuesto sobre la renta afectará obviamente a las relaciones precios-salarios.

Crecimiento variable de la población. En lugar de considerar a la tasa relativa de aumento de la población como una constante, podemos, de una manera más clásica, convertirla en una variable endógena del sistema. En particular, si damos por supuesto que $\dot{L}/L$ sólo depende del nivel de renta o consumo per cápita, o en realidad de la tasa de salario real, es muy fácil efectuar la generalización. Dado que la renta per cápita viene dada por $Y/L=F(r,1)$, el resultado es que la tasa de crecimiento de la mano de obra pasa a ser $n = n(r)$, una función única de la *ratio* capital-trabajo. La ecuación diferencial básica se convierte en:

$$r=sF(r,1)-n(r)r$$

Gráficamente, la única diferencia es que la recta nr se transforma en una curva, cuya forma depende de la naturaleza exacta de la dependencia entre el crecimiento de la población y la renta real, y entre la renta real y la *ratio* capital-trabajo.

Supongamos, por ejemplo, que para niveles muy bajos de la renta per cápita o del salario real de la población tiende a decrecer; para niveles más altos de renta, comienza a aumentar; y que para niveles de renta aún más elevados, la tasa de crecimiento de la población se nivela y comienza a descender. El resultado puede ser algo parecido al gráfico 9. La *ratio* de equilibrio capital-trabajo r_1 es estable, pero r_2 es inestable. Podemos obtener los niveles correspondientes de renta per cápita de la forma de $F(r,1)$. Si la *ratio* inicial capital-trabajo es inferior a r_2, el sistema tenderá por sí mismo a volver a r_1. Si pudiéramos estimular de algún modo la *ratio* inicial por encima del nivel crítico r_2, se establecería un proceso autosostenido de aumento de la renta per cápita (y la población seguiría creciendo). Lo interesante de este caso es que muestra cómo, en ausencia total de indivisibilidades o de rendimientos crecientes, puede darse una situación en la cual la acumulación de capital en pequeña escala sólo da lugar de nuevo a un estancamiento, pero que una mayor explosión inversora puede impulsar el sistema a una ampliación autogenerada de renta y capital per cápita. El lector puede trabajar con otras posibilidades.

VII. MATIZACIONES

Todo lo visto anteriormente no es sino la cara neoclásica de la moneda. Más concretamente, es la economía del pleno empleo, en su doble aspecto de sistema en situación de equilibrio y sin fricciones, competitivo y causal. Todas las dificultades y rigideces que acompañan al moderno análisis keynesiano de la renta se han dejado de lado. No es mi intención ignorar la existencia de tales problemas ni negar su importancia a largo plazo. Mi propósito era examinar lo que podríamos denominar la perspectiva equilibrista del crecimiento económico, y hacia dónde conducirían a un modelo simple unas suposiciones más flexibles relativas a la producción. Todavía podemos atribuir el subempleo y el exceso de capacidad, o sus contrarios, a cualquiera de las antiguas causas de demanda total deficiente o excesiva, pero será más difícil atribuirlas a alguna desviación de un estrecho "equilibrio".

En esta sección final, sólo desearía mencionar algunos de los obstáculos más elementales para el pleno empleo, e indicar cómo afectan al modelo neoclásico (10).

Salarios rígidos. Esta suposición sobre la oferta laboral es justo la inversa de la que se hizo anteriormente. El salario real se mantiene en el nivel arbitrario $\left(\frac{\bar{w}}{p}\right)$. El nivel de empleo debe ser tal que mantenga el producto marginal del trabajo en este nivel. Dado que las productividades marginales sólo dependen de la *ratio* capital–trabajo, se sigue que si fijamos el salario real, fijamos r, en, digamos, $\bar{r}$. De este modo, $K / L = \bar{r}$. Ahora ya no tiene sentido utilizar r como nuestra variable, de modo que volvemos a [3], que, en vista de la última frase, pasa a ser:

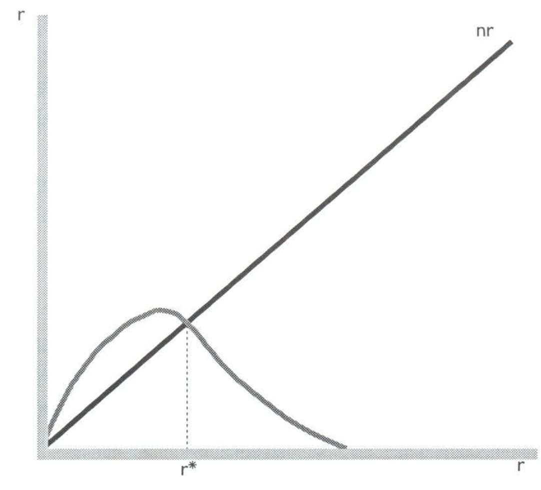
$$\bar{r}\dot{L} = sF(\bar{r}L, L)$$

o bien:

$$\frac{\dot{L}}{L} = \frac{s}{\bar{r}} F(\bar{r}, 1)$$

Ello indica que el *empleo* crecerá exponencialmente a una tasa $(s / r) F(\bar{r}, 1)$. Si esta tasa no llega a n,

GRÁFICO 8



la tasa de crecimiento de la fuerza laboral, el desempleo aparecerá y aumentará. Si $s / \bar{r}F(\bar{r}, 1) > n$, el resultado será la escasez de trabajo y, presumiblemente, el salario real pasará a ser más flexible hacia arriba. Ello conduce a que, si $(\bar{w} / p)$ corresponde a una *ratio* capital–trabajo que normalmente tendería a disminuir ($\dot{r} < 0$), aparece el desempleo y viceversa. En los diagramas, $s / \bar{r}F(\bar{r}, 1)$ es precisamente la pendiente de la recta que parte del origen hacia la curva $sF(r, 1)$ en $\bar{r}$. Si esta pendiente es más llana que n, aparece el desempleo; si es más escarpada, aumenta la escasez de empleo.

Preferencia por la liquidez. Este tema es demasiado complejo para tratarlo aquí en profundidad. Además, el artículo de Tobin que acabamos de mencionar contiene un nuevo y penetrante análisis sobre la dinámica relativa a las preferencias de activos. Me limitaré a mencionar aquí, aunque sea de un modo aproximado, el punto de contacto con el modelo neoclásico.

Si tomamos de nuevo el nivel general de precios como una constante (lo que ahora es algo antinatural), la demanda monetaria para operaciones dependerá de la producción real Y, y la elección entre tener efectivo o tener capital dependerá de la renta real q / p. Si hay una determinada cantidad de dinero, ello nos proporciona una relación entre Y y q / p, o, básicamente, entre K y L, por ejemplo:

$$\bar{M} = Q\left(Y, \frac{q}{p}\right) = Q\left(F(K, L), F_K(K, L)\right) \qquad [15]$$

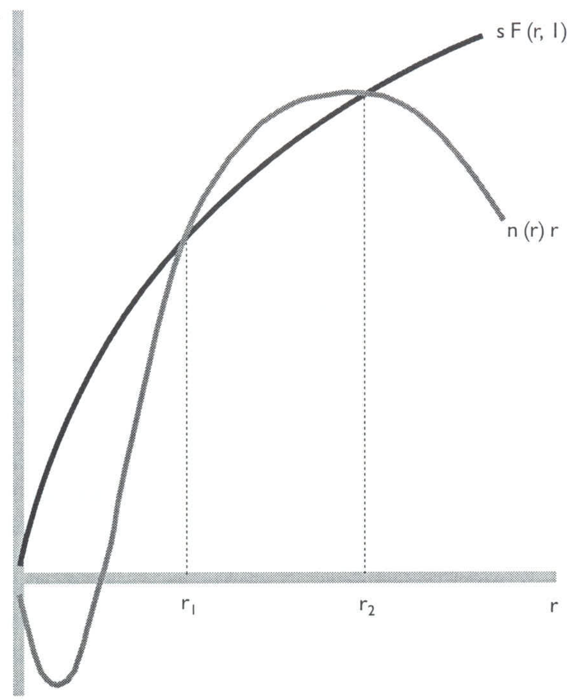
en donde ahora K representa al capital en uso. En el supuesto anterior de pleno empleo del trabajo mediante salarios flexibles, podemos sustituir $L=L_0e^{nt}$, y despejar [15] para $K(t)$, o bienes de capital empleados. A partir de $K(t)$ y L, podemos calcular $Y(t)$, y, de ahí, el ahorro total $sY(t)$. Pero ello representa la inversión neta (la riqueza que no se mantiene en efectivo, debe tenerse como capital). Las existencias iniciales de capital y el flujo de inversiones determinan el *stock* de capital disponible que podemos comparar con $K(t)$ para medir el exceso de oferta o demanda de servicios del capital.

En la famosa "trampa de liquidez", en que la demanda de saldos improductivos se hace infinitamente elástica respecto a cierta tasa positiva de interés, tenemos un precio rígido de factores que podemos tratar en gran medida como hemos tratado antes los salarios rígidos. El resultado será una infrautilización del capital, si la tasa de interés pasa a ser rígida en algún punto por encima del nivel correspondiente a la *ratio* de equilibrio capital–trabajo.

Pero es exactamente aquí cuando se aprecia meridianamente la futilidad de intentar describir esta situación en términos de un modelo neoclásico "real", dado que ya no podemos omitir la influencia directa de los factores monetarios en el consumo y la inversión reales. Cuando el tema en cuestión es la asignación de tenencias de activos entre efectivo y capital, el precio del bien compuesto pasa a ser una importante variable y no podemos esquivar la necesidad de una dinámica monetaria.

Implicaciones para la política económica. No es éste el lugar más apropiado para comentar la utilidad del análisis económico abstracto existente hasta ahora para los problemas prácticos de estabilización económica. He adoptado deliberadamente una postura tan neoclásica como me ha sido posible. Parte de ello roza la política. Puede ser necesaria una acción deliberada para mantener el pleno empleo. Sin embargo, la multiplicidad de rutas hacia el pleno empleo, mediante políticas fiscales, de gasto público y monetarias, deja al arbitrio de la nación *cierta* libertad de acción para elegir si desea un elevado nivel de empleo con una formación de capital relativamente intensa, un bajo nivel de consumo, un rápido crecimiento; o a la inversa, o una mezcla de todo ello. No estoy sugiriendo que este tipo de política (por ejemplo: dinero barato y un superávit presupuestario) pueda llevarse a efecto sin serios esfuerzos. Pero una de las ventajas de este modelo de crecimiento más flexible es que proporciona una contrapartida teórica a estas posibilidades prácticas (11).

GRÁFICO 9



Incertidumbre, etc. No es posible elaborar una teoría creíble sobre la inversión que se basa en el supuesto de una previsión y arbitrajes perfectos a lo largo del tiempo. Hay demasiadas razones para que las inversiones netas no se vean a veces afectadas por los cambios corrientes en los rendimientos reales del capital, y, en otras ocasiones, respondan de una manera excesiva. A lo largo de este ensayo, hemos barrido todas estas telarañas y algunas otras. En este contexto, quizá sea justificable.

NOTAS

(*) Solow, Robert M. (1956), "A contribution to the theory of economic growth", *Quaterly Journal of Economics*, vol. 70. Traducción de DIORKI, revisada por la Redacción de PERSPECTIVAS DEL SISTEMA FINANCIERO.

(1) Por eso los costes de transporte no eran más que una mera e insignificante complicación en la teoría comercial ricardiana, aunque constituían una característica vital de la realidad para von Thünen.

(2) Véase, por ejemplo, Haavelmo: *A Study in the Theory of Economic Evolution* (Amsterdam, 1954), págs. 9-11. No todos los países "subdesarrollados" son zonas con escasez de tierra. Etiopía constituye el ejemplo contrario. Podemos imaginar que la teoría es aplicable siempre que podamos ganar tierra cultivable al desierto a un coste básicamente constante.

(3) El conjunto completo de las tres ecuaciones se compone de [3], [4] y $\frac{\partial F(K,L)}{\partial L} = w$.

(4) Hay una excepción a esto. Si $K=0$, $r=0$ y el sistema no puede comenzar; sin capital no hay producción, y, por tanto, no hay acumulación. Pero este equilibrio es inestable; la más ligera acumulación inesperada de capital dará pie a que comience el sistema el desplazamiento hacia r^*.

(5) Esto parece contradecir un teorema de R. M. Solow y P. A. Samuelson:"Balanced Growth under Constant Returns to Scale", *Econometrica*, XXI (1953), págs. 412-24, pero se trata de una contradicción sólo aparente. Allí se dio por sentado que todo bien tenía una productividad marginal positiva en la producción de cada bien individual. Aquí, el capital no se puede utilizar para generar trabajo.

(6) La ecuación de la primera podría ser $s_1 F^1(r,1) = nr + \sqrt{r}$, y la de la segunda, $s_2 F^2(r,1) = \frac{nr}{r+1}$.

(7) En el caso polarizado de la competencia pura, incluso si las empresas individuales poseen curvas de promedios de costes con forma de U, podemos imaginar que se producen cambios en el producto total exclusivamente por la entrada y salida de empresas idénticas de tamaño óptimo. El producto total, se produce en este caso a un coste constante; y, de hecho, dado el gran número de empresas relativamente pequeñas cada una de las cuales produce a un coste aproximadamente constante con pequeñas variaciones, podemos definir, sin un error importante, una función de producción total que muestre rendimientos constantes de escala. Habrá desviaciones menores, dado que esta función de producción total no es estrictamente válida para las variaciones de producción menores que el tamaño de una empresa óptima. Pero ello puede considerarse despreciable a la hora del análisis a largo plazo.

Tendemos a adaptar de forma natural el modelo a un supuesto más general de competencia universal monopolística. Pero falla el dispositivo anterior. Si la industria consiste en empresas idénticas con equilibrios tangentes idénticos para grandes grupos, con sujeción a la restricción de que los cambios de producción sólo tienen lugar a través de cambios en el número de empresas, podremos quizá definir una función de producción total con costes constantes. Pero en la realidad esta construcción es absolutamente irrelevante, porque incluso si deseamos tener una visión general de la discontinuidad y la tratamos como diferenciable, las derivadas parciales de tal función no serán productividades marginales a las que respondan las empresas individuales. Cada empresa está en la rama descendente de su curva de costes unitarios, mientras que en el caso competitivo, estaría produciendo realmente a costes localmente constantes. El problema más arduo sigue siendo introducir la competencia monopolística en modelos totalizadores. Por ejemplo, las ecuaciones del valor del producto marginal del texto tendrían que pasar a ser relaciones marginales de ingreso-producto, que requerirían a su vez la presencia explícita de curvas de demanda. En este campo, es preciso realizar mucha más experimentación, cuya recompensa será un mayor realismo.

(8) En sus comentarios sobre un artículo de Pilvin, en *Journal*, noviembre 1953, pág. 545.

(9) Solow, R.M. (1953-1954), "A Note on Price Level and Interest Rate in a Growth Model", *Review of Economic Studies,* núm. 54, páginas 74-78.

(10) Un análisis mucho más completo de estos importantes problemas se encuentra en un artículo de James Tobin, en el *Journal of Political Economy*, LXII, (1955), págs.103-15.

(11) Véase el artículo de Paul A. Samuelon en *Income Stabilization for a Developing Democracy*, ed. Millikan (New Haven, 1953), página 577. William Vickrey ha expresado pensamientos similares en su ensayo *Post-Keynesian Economics*, ed. Kurihara (New Brunswick, 1954).